

# **Compléments à l'ouvrage**

## **CRÉATIVITÉ ET INNOVATION**

### **L'intelligence collective au service du management de projet**

Par Tayeb Louafa et Francis-luc Perret

#### **Contenu**

*Algorithme de TRIZ*

*Fondements des utilités espérées*

*Algorithme d'exploitation d'AHP*

*Méthodes de détermination des seuils*

*Procédures d'exploitation des suites ELECTRE I, II, IS, III, IV, TRI*

*Procédures d'exploitation de PROMETHEE I, II*

*Synthèse de classements*

#### **Références**

Les références à des auteurs ou des ouvrages contenues dans ce document renvoient aux chapitres correspondants de l'ouvrage cité ci-dessus



<b>D1.</b>	<b>PROCÉDURE D'UTILISATION D'ARIZ, ALGORITHME DE TRIZ.....</b>	<b>6</b>
D1.1	Processus général .....	6
D1.2	Diagrammes logiques.....	9
<b>D2.</b>	<b>COMPLÉMENTS AUX FONDEMENTS DES UTILITÉS MULTIATTRIBUTS ....</b>	<b>20</b>
D2.1	Fondements de l'utilité espérée.....	20
D2.2	Formes de la fonction d'utilité de synthèse.....	24
<b>D3.</b>	<b>PROCÉDURE D'EXPLOITATION D'ANALYTICAL HIERARCHY PROCESS ....</b>	<b>29</b>
D3.1	Principes.....	29
D3.2	Procédure .....	30
<b>D4.</b>	<b>SURCLASSEMENT DE SYNTHÈSE, SEUILS ET PROCÉDURES</b>	
<b>D'EXPLOITATION</b>	<b>.....</b>	<b>33</b>
D4.1	Détermination des seuils .....	33
D4.2	Procédures d'exploitation d'ELECTRE I, II, IS.....	36
D4.3	Procédure d'exploitation d'ELECTRE III.....	42
D4.4	ELECTRE IV .....	49
D4.5	ELECTRE TRI .....	55
D4.6	PROMETHEE I/II.....	56
<b>D5.</b>	<b>PROCÉDURE DE SYNTHÈSE DE DEUX CLASSEMENTS.....</b>	<b>63</b>
D5.1	Principes.....	63
D5.2	Description de la procédure .....	64
D5.3	Diagramme logique de la synthèse de deux classements.....	67



## FIGURES

Fig. 1-1 Description générale. ....	9
Fig. 1-2 Séquence d'information de la problématique.....	10
Fig. 1-3 Séquence d'analyse de la problématique.....	11
Fig. 1-4 Séquence de réduction du problème.....	12
Fig. 1-5 Séquence de découpage du problème.....	13
Fig. 1-6 Séquence d'application des ressources.....	14
Fig. 1-7 Séquence d'application des bases de connaissances.....	15
Fig. 1-8 Séquence de substitution du problème. ....	16
Fig. 1-9 Séquence d'analyse des solutions.....	17
Fig. 1-10 Séquence d'application de la solution. ....	18
Fig. 1-11 Séquence d'analyse du processus de résolution. ....	19
Fig. 4-1 Illustration de l'indice de concordance.....	41
Fig. 4-2 Les quatre situations selon la valeur de l'indice de crédibilité. ....	44
Fig. 4-3 Diagramme logique des distillations d'ELECTRE III.....	48
Fig. 4-4 Diagramme logique du processus de distillation d'ELECTRE IV.....	54
Fig. 4-5 Diagramme logique du processus d'exploitation de la suite PROMETHEE.....	62
Fig. 5-1 Procédure de détermination de la synthèse de deux classements. ....	67

# D1.

## PROCÉDURE D'UTILISATION D'ARIZ, ALGORITHME DE TRIZ

*Ce chapitre donne une description d'ARIZ inspirée de la version ARIZ 85C, sous la forme d'une suite de diagrammes logiques couvrant l'ensemble du processus de résolution d'un problème technique, de l'information à l'évaluation, en passant par la découverte de solutions. Nous le proposons en complément à la partie consacrée aux techniques de créativité (Partie 1), plus précisément à la section 5.7 du chapitre 5.*

### D1.1 Processus général

Le premier diagramme (Fig. 1-1) donne une description globale du processus de résolution constitué des phases d'information du problème, d'analyse, de réduction, de découpage, d'utilisation des ressources, d'utilisation des connaissances, de substitution, d'analyse des solutions, d'application de la solution retenue, et enfin de l'évaluation du processus de résolution pour capitaliser l'expérience.

Il faut bien voir qu'il ne s'agit en aucune manière d'une démarche constituée d'étapes séquentielles, mais plutôt d'un processus de type concourant, qu'on peut interrompre dès qu'une solution satisfaisante est découverte, ou répéter des phases ou des séquences de phases dans le cadre de feedbacks et de rétroactions.

L'*information* du problème (Fig. 1-2) tend à identifier les objectifs économiques et techniques, les contraintes et limitations, et les changements possibles susceptibles de représenter le cadre de solutions immédiates ou l'embryon de solutions futures, le tout par le moyen d'outils de collecte, d'organisation et de description des informations insérés dans une démarche structurée.

L'*analyse* du problème (Fig. 1-3) implique avant tout chose l'énoncé de la technique, c'est-à-dire du système technique et du processus technologique, et des contradictions administratives associées à cette technique. On essaiera dans cette phase de formuler le problème sous une forme connue en utilisant des heuristiques comme le Mind-mapping ou la synectique, de façon à déterminer et appliquer des solutions génériques.

La *réduction* du problème (Fig. 1-4) intervient si aucune solution générique n'est trouvée aux contradictions administratives. Dans ce cas on tente d'identifier des contradictions techniques en réduisant le problème, de sorte à utiliser la matrice des contradictions pour trouver une solution, ou dans le cas de l'absence d'une solution, obtenir une formulation plus complète du problème avec l'indication des contradictions par paires.

Avec le *découpage* du problème (Fig. 1-5), on va plus loin dans l'affinement ou plus bas dans la décomposition hiérarchique, en définissant les zones et les périodes d'opération, dont la compréhension permet de donner une première formulation du résultat final idéal par l'élimination des fonctions nuisibles et la réalisation des fonctions utiles. L'utilisation des ressources existantes et la formulation de la contradiction physique conduisent à l'énoncé d'un deuxième résultat final idéal qu'on soumet au test d'applicabilité des standards.

L'application de *ressources* (Fig. 1-6) sert à s'assurer de l'existence d'une solution au problème. Des ressources de divers types et de diverses natures, comme les champs et les substances, les ressources combinées, dérivées ou additionnelles, sont utilisées successivement pour étoffer l'énoncé du problème et le deuxième résultat final idéal, afin d'accroître les chances de trouver une solution au niveau des standards.

L'application des *connaissances* (Fig. 1-7) aux solutions approchées par les standards, permettent de sélectionner une solution ou de construire une nouvelle par analogie, en examinant les listes d'effets ou en appliquant des transformations appropriées.

La *substitution* du problème (Fig. 1-8) intervient si aucune solution n'est envisageable et consiste à appliquer un certain nombre de tests qui permettent de se brancher de nouveau à la

phase de réduction ou celle de l'analyse du problème, jusqu'à découvrir la ou les solutions satisfaisantes.

L'*analyse* des solutions (Fig. 1-9) permet sélectionner la meilleure solution, de vérifier son degré de nouveauté et de construire la méthode de mise en œuvre.

L'*application* de la solution (Fig. 1-10) consiste à considérer son environnement, notamment son impact sur le super-système, déterminer les changements que doit subir ce dernier, et évaluer les gains de performance au niveau de l'ensemble de la technique. On peut également vérifier si la solution retenue est envisageable pour résoudre d'autres problèmes.

Enfin, une *analyse* comparative (Fig. 1-11) de l'ensemble du processus de résolution permet de tirer des leçons et capitaliser l'expérience.

D1.2 Diagrammes logiques

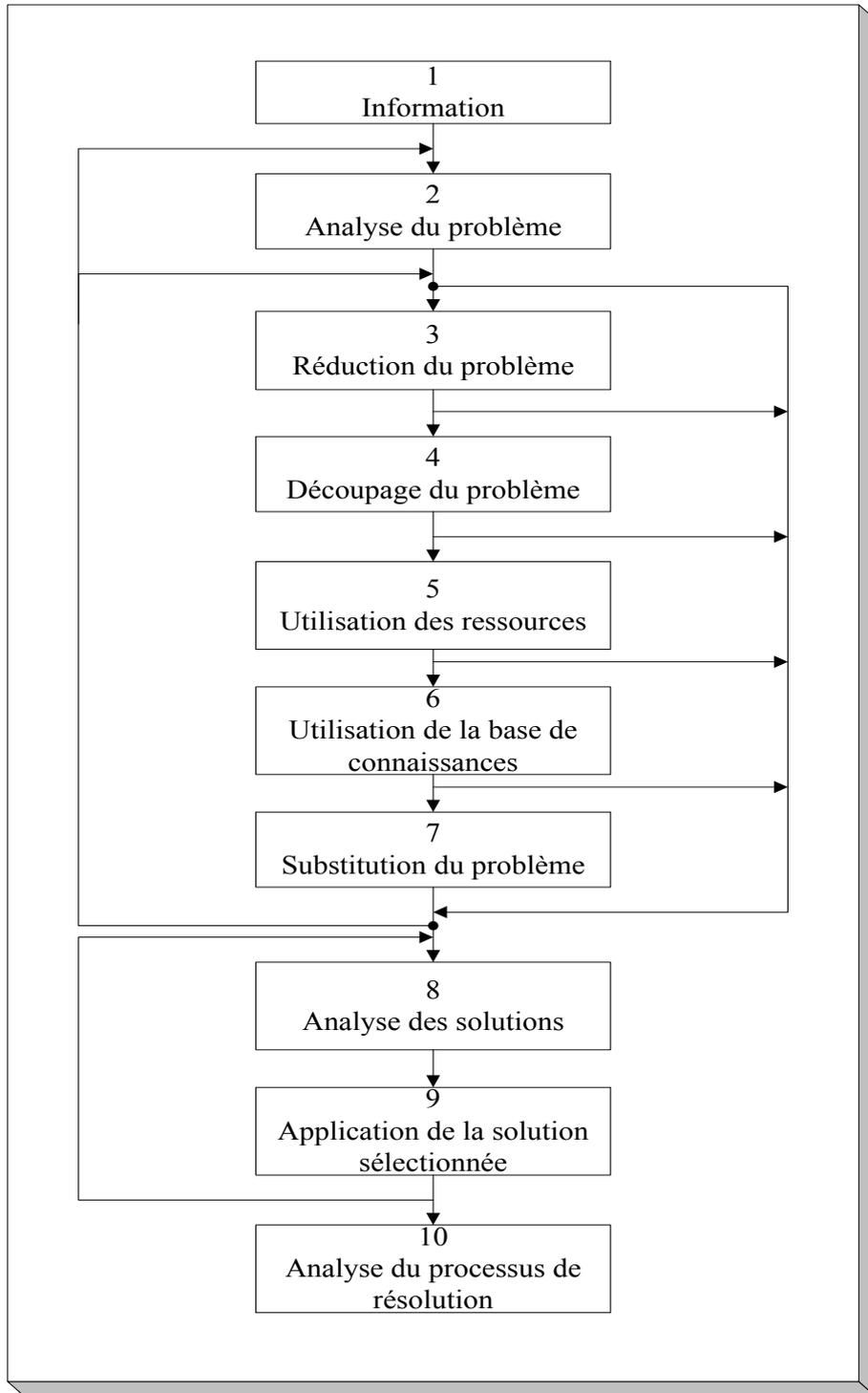


Fig. 1-1 Description générale.

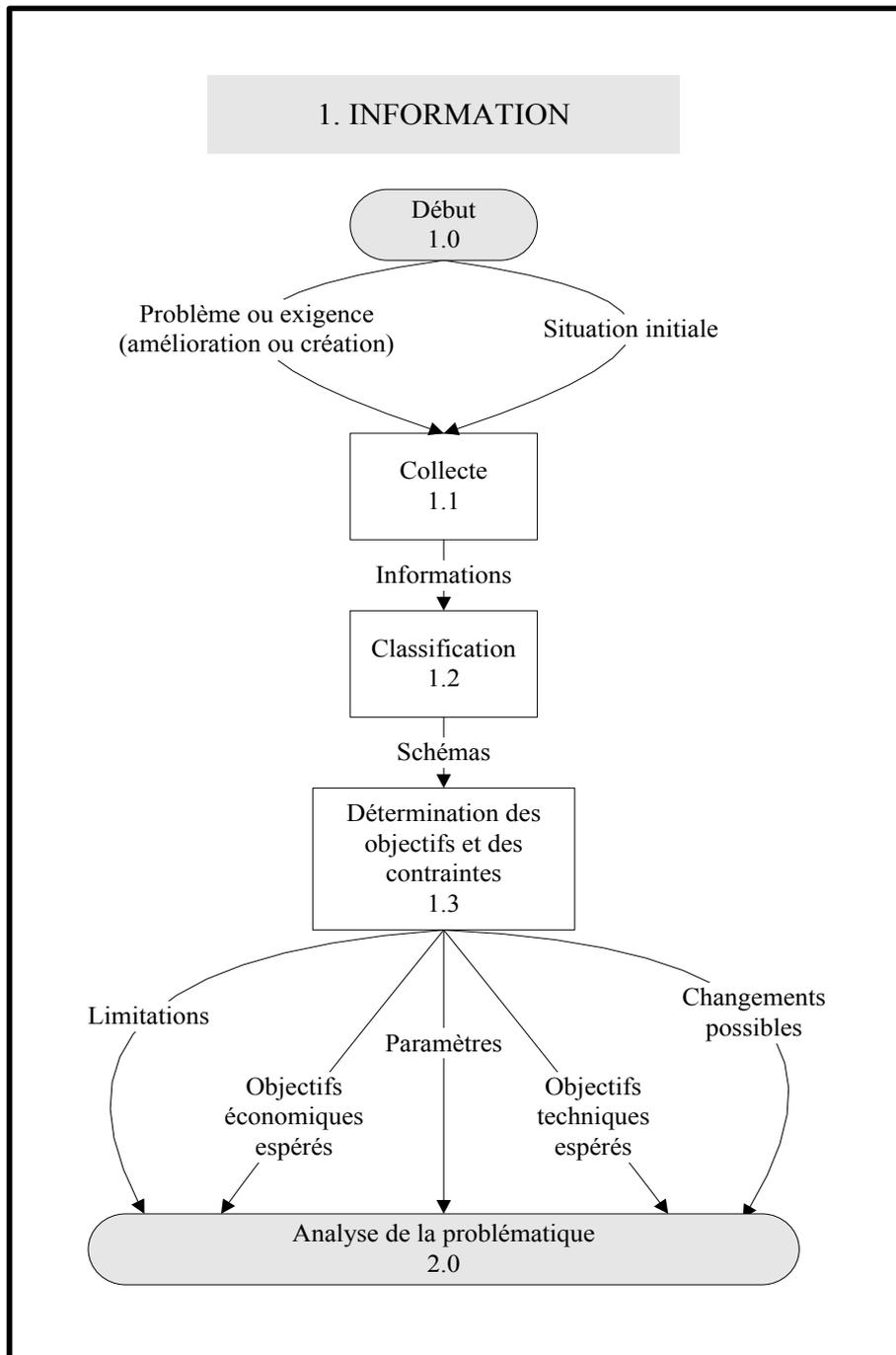


Fig. 1-2 Séquence d'information de la problématique.

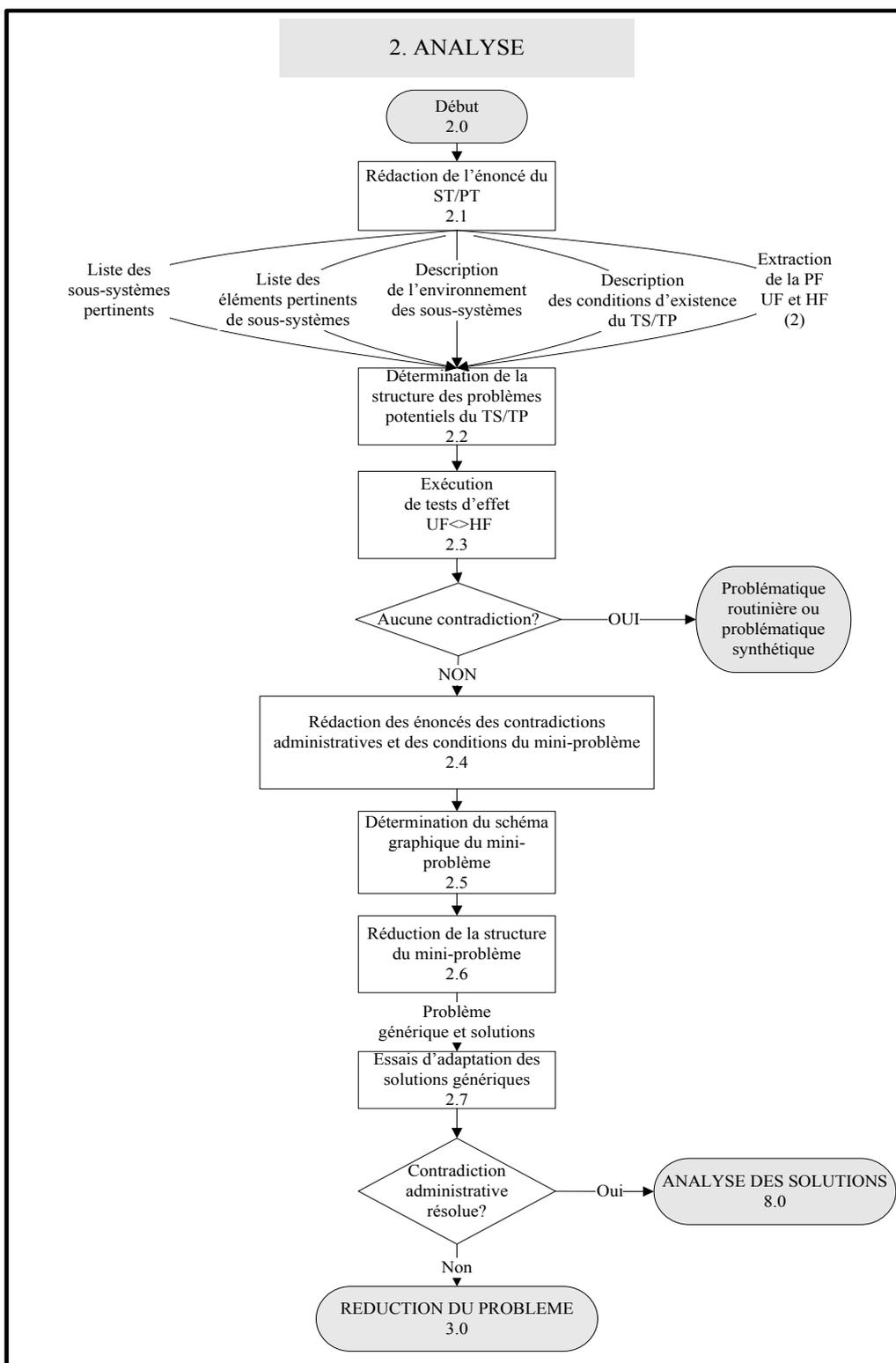


Fig. 1-3 Séquence d'analyse de la problématique.

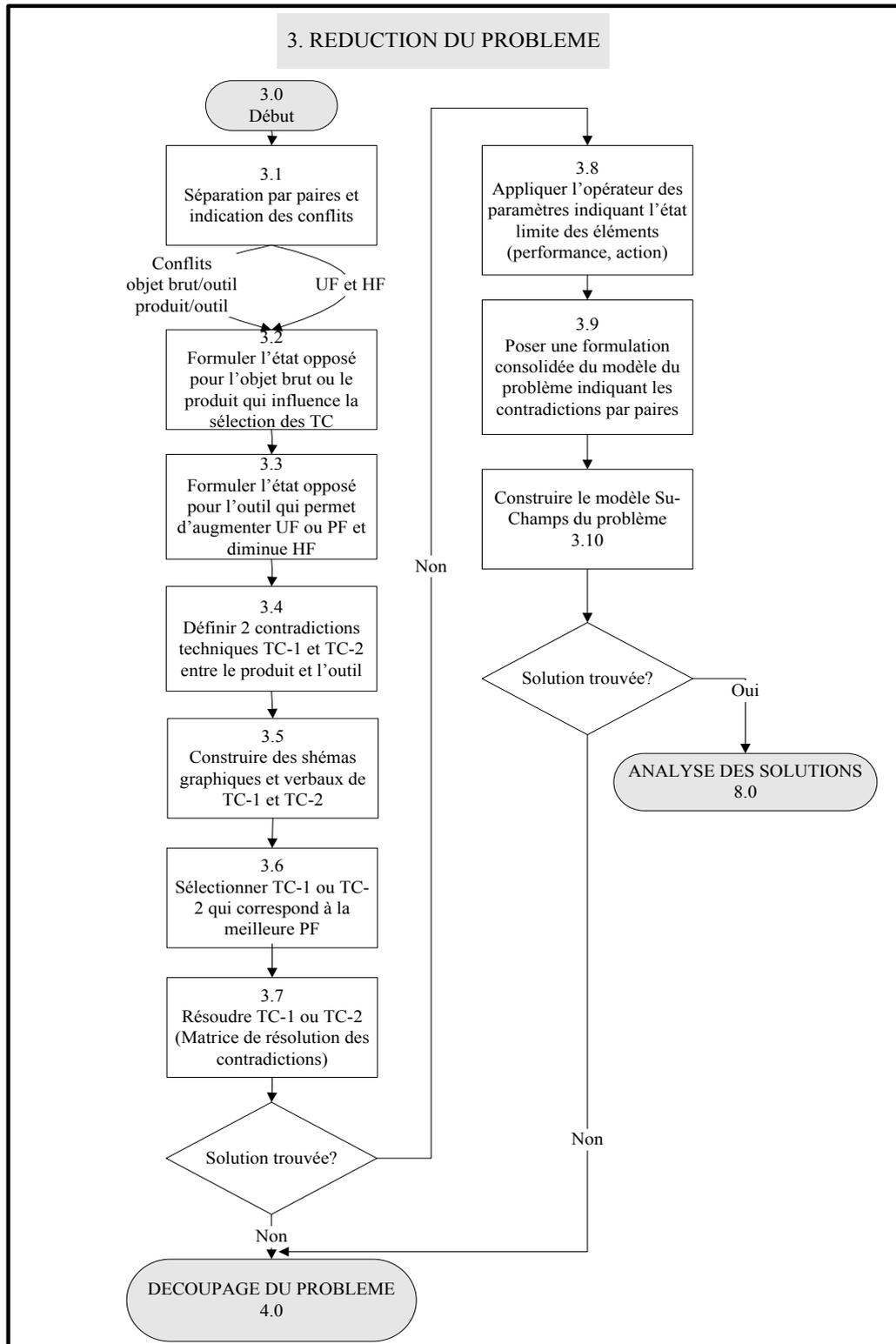


Fig. 1-4 Séquence de réduction du problème.

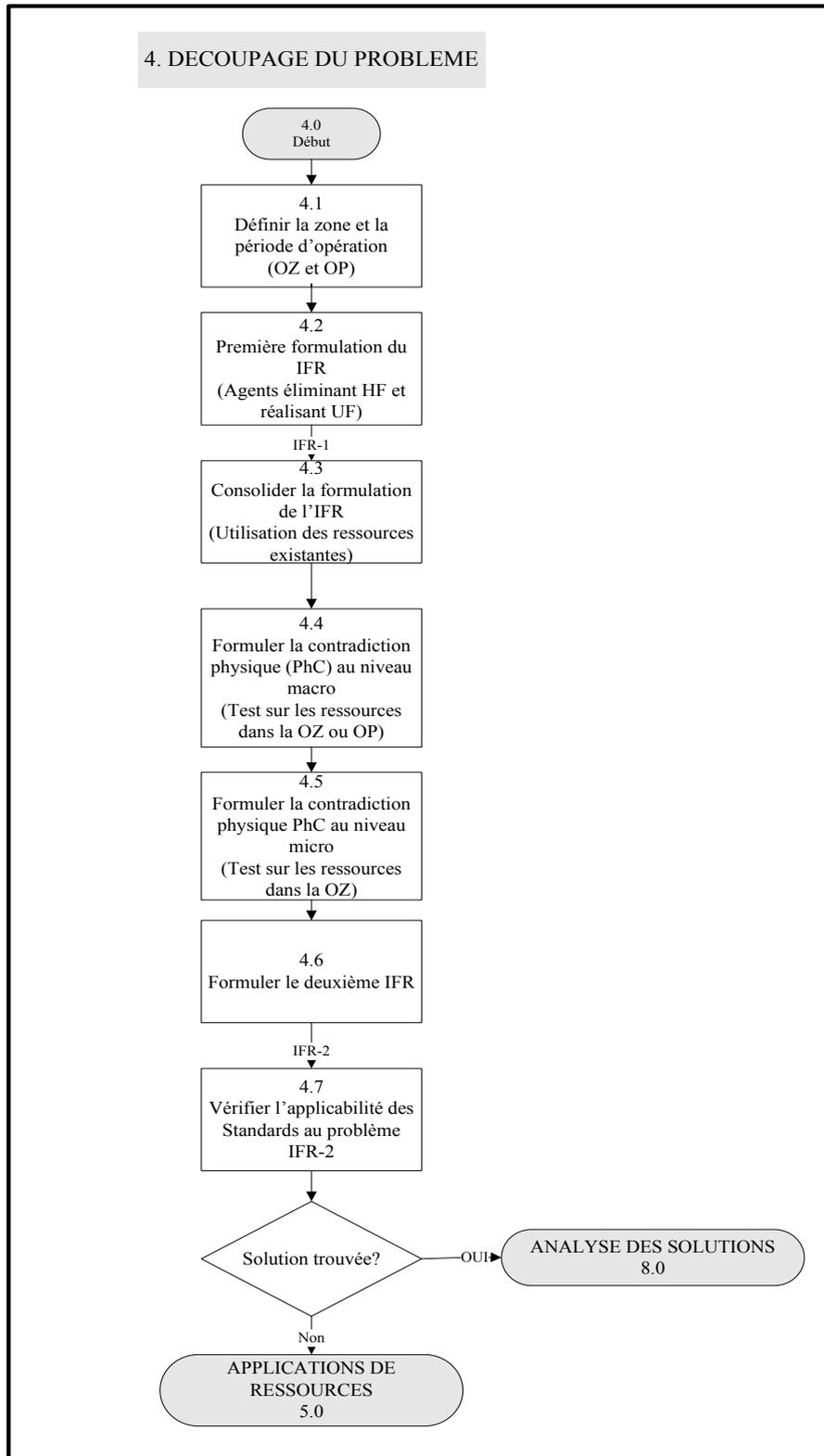


Fig. 1-5 Séquence de découpage du problème.

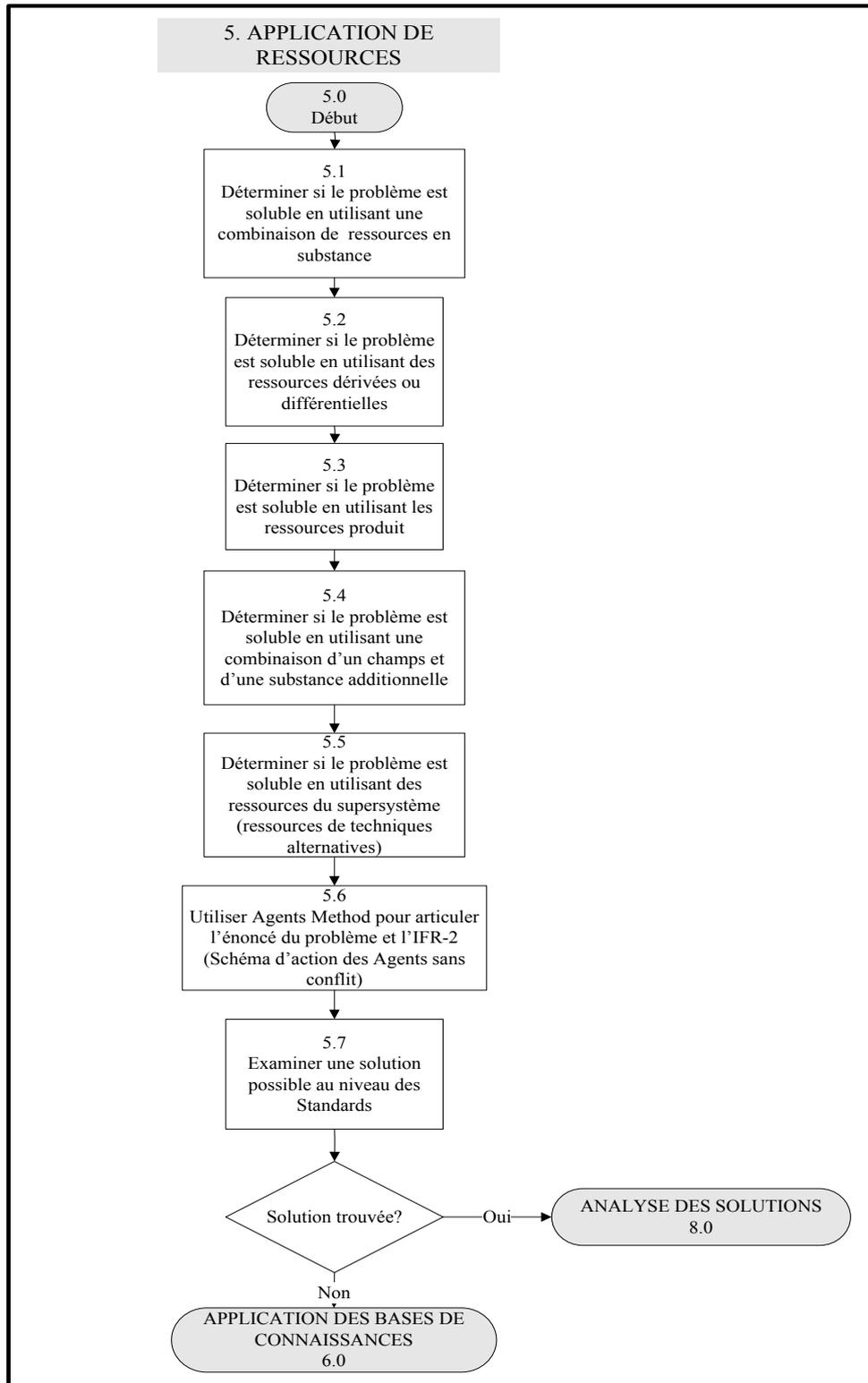


Fig. 1-6 Séquence d'application des ressources.

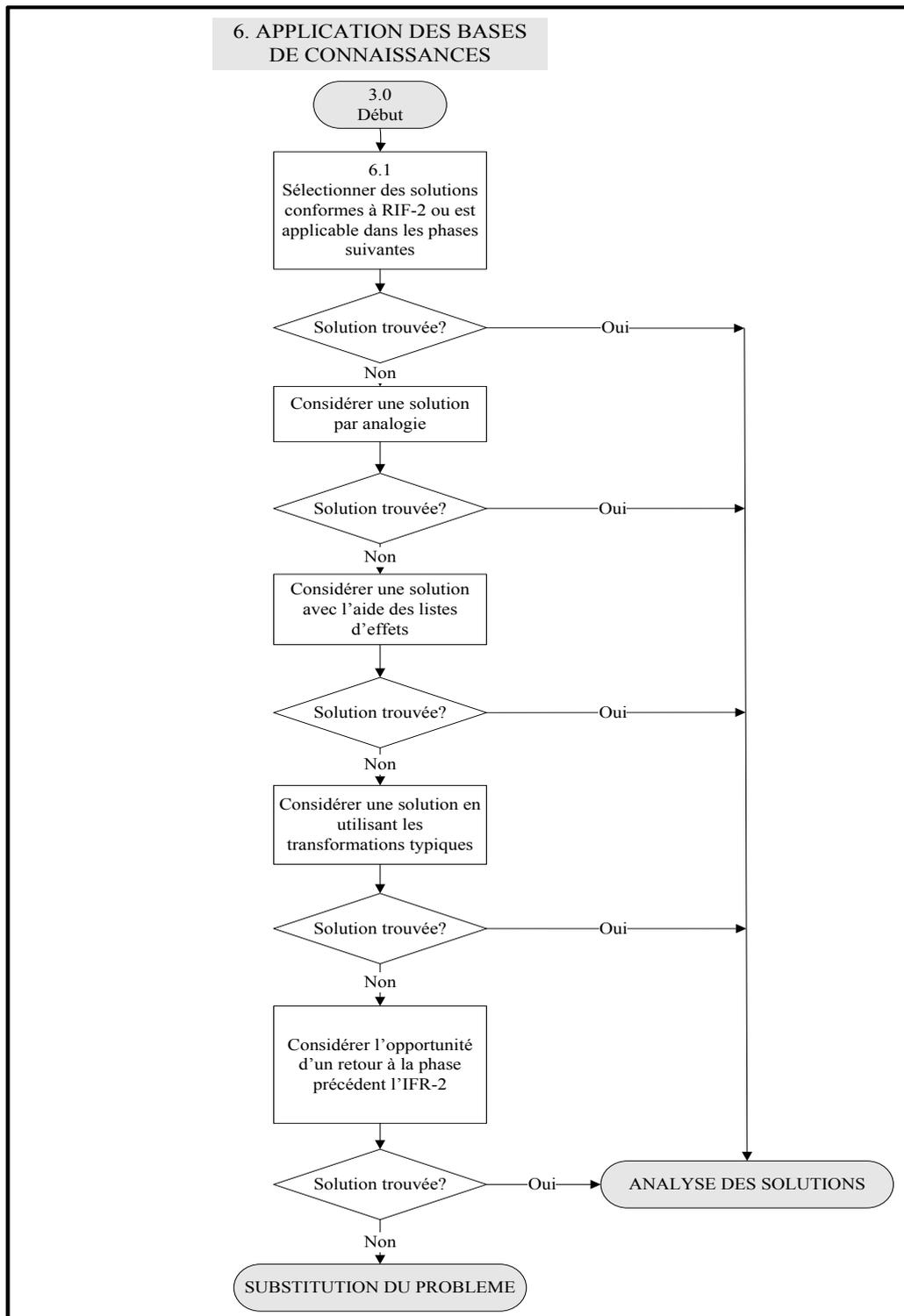


Fig. 1-7 Séquence d'application des bases de connaissances.

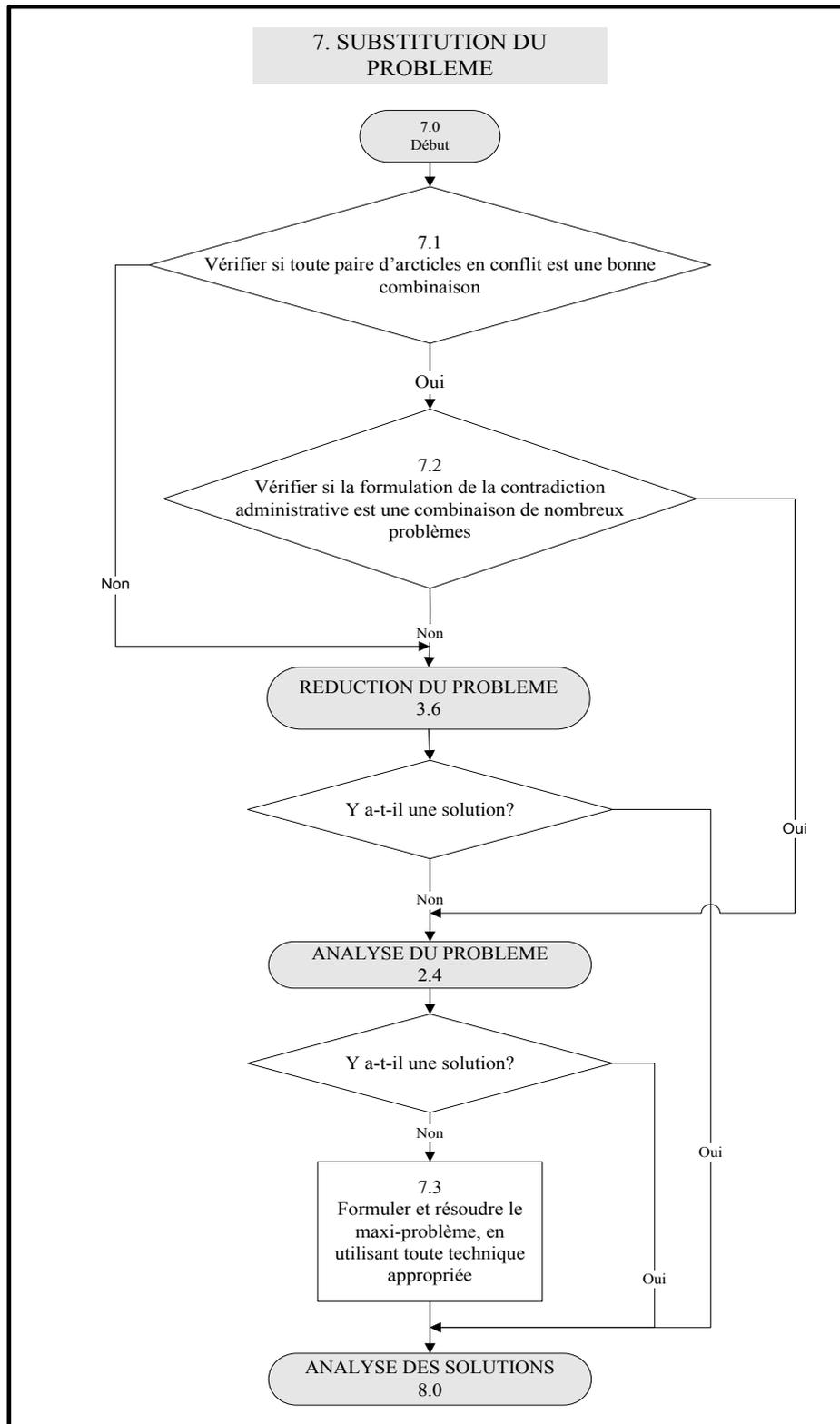


Fig. 1-8 Séquence de substitution du problème.

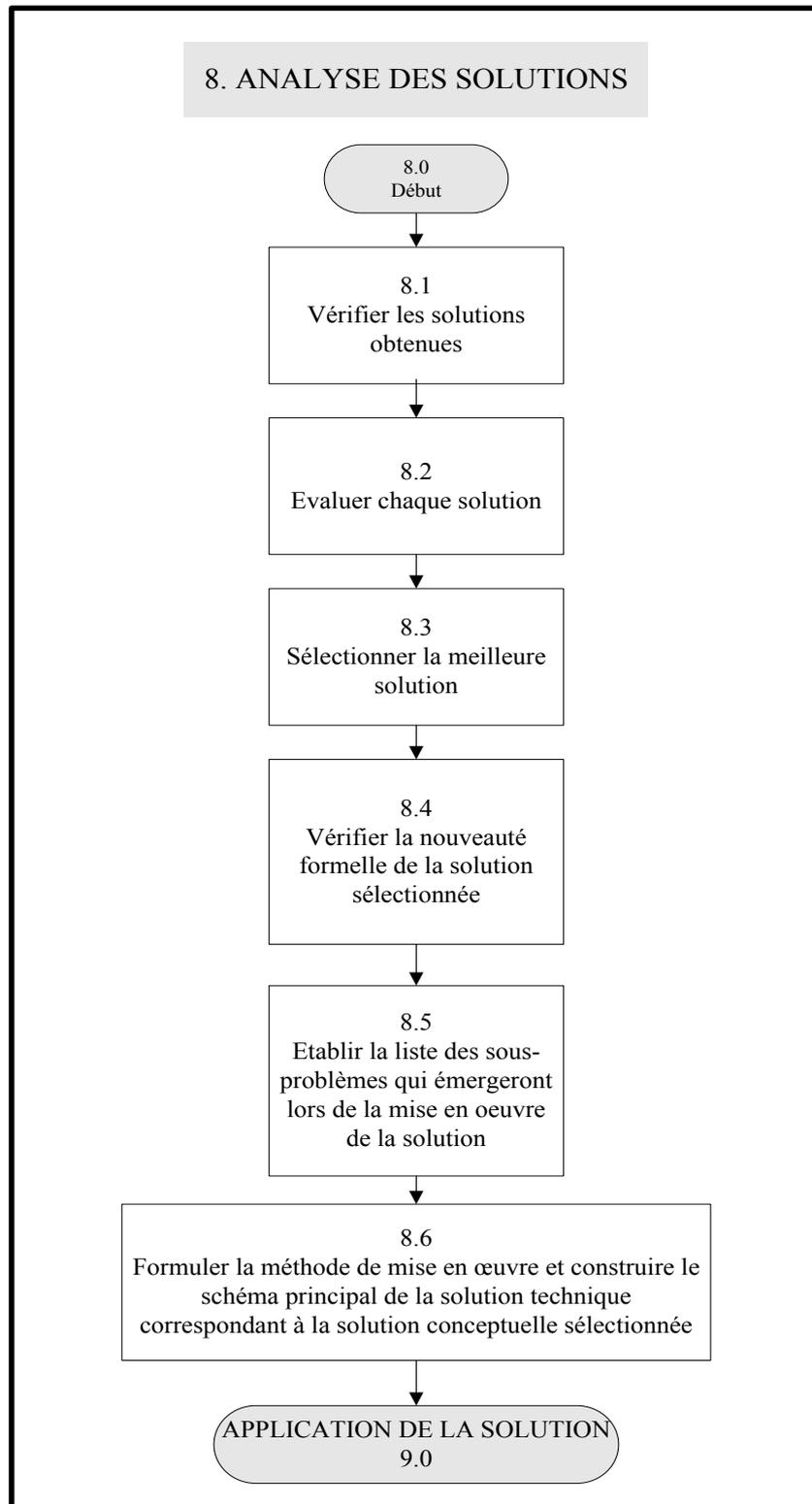


Fig. 1-9 Séquence d'analyse des solutions.

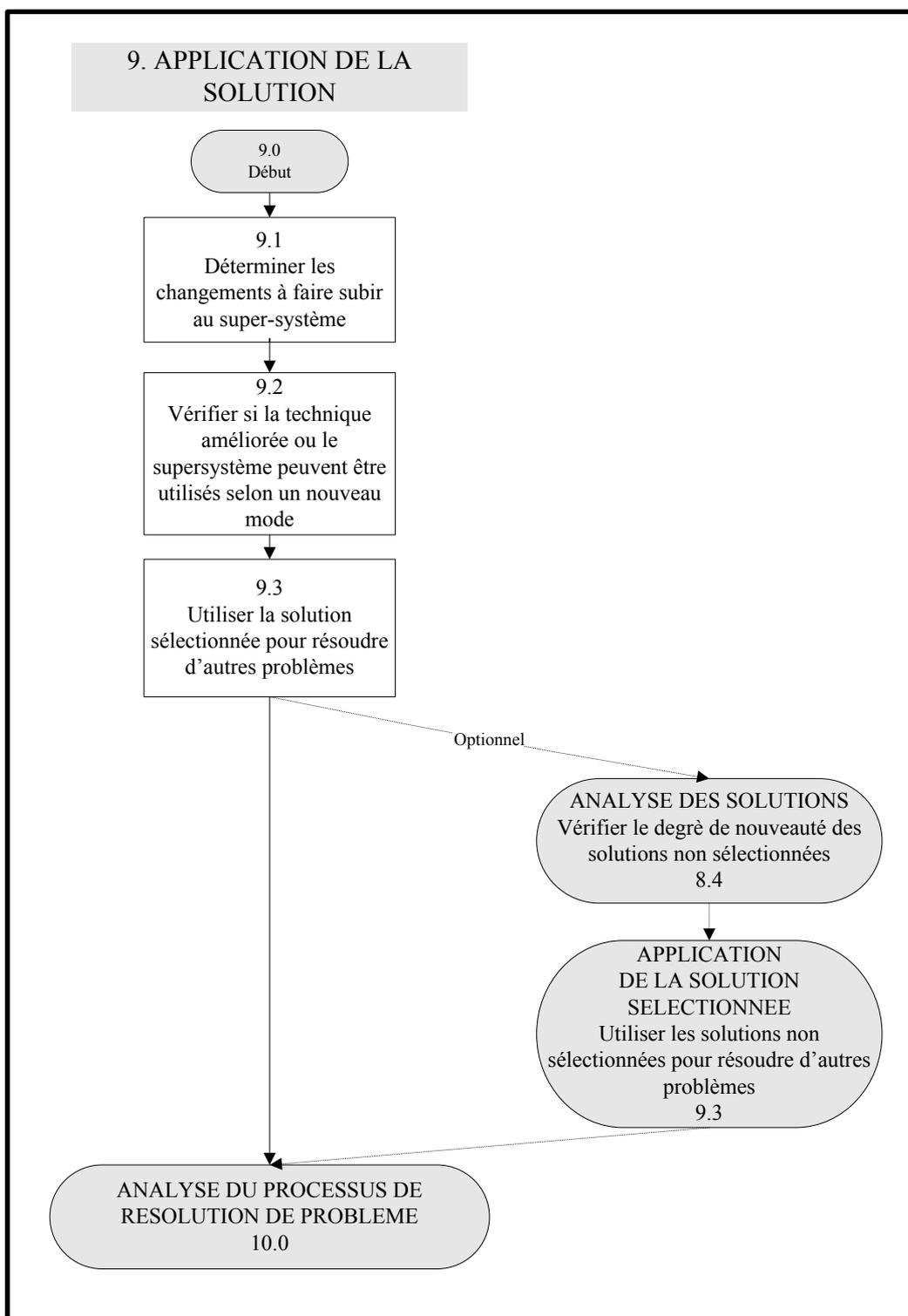


Fig. 1-10 Séquence d'application de la solution.

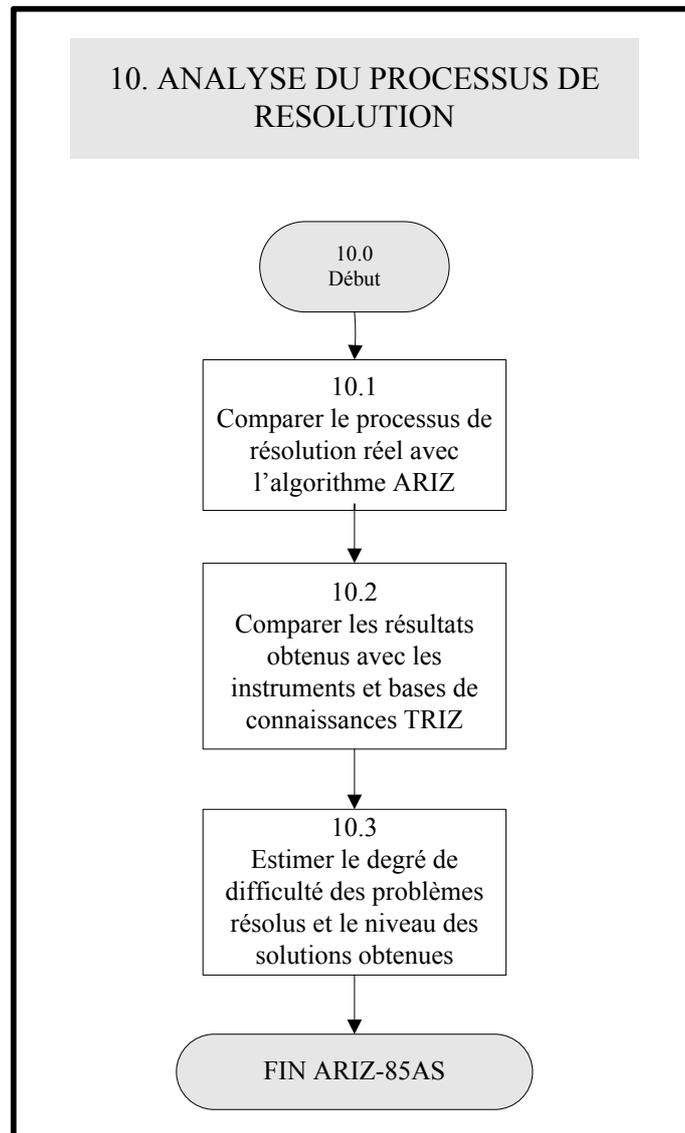


Fig. 1-11 Séquence d'analyse du processus de résolution.

## D2.

# COMPLÉMENTS AUX FONDEMENTS DES UTILITÉS MULTIATTRIBUTS

*Les formulations multiattributs dont les versions les plus récentes sont dues à Ralph L. Keeney sont fondées pour l'essentiel sur les résultats des nombreux travaux entrepris dans le domaine de l'utilité espérée, en particulier ceux de Peter C. Fishburn<sup>1</sup>. Ce chapitre couvre principalement les justifications formelles et axiomatiques des principaux résultats énoncés dans le chapitre 8 de la deuxième partie de l'ouvrage cité en tête de ce document.*

### D2.1 Fondements de l'utilité espérée

#### D2.1.1 Loteries et relations de préférence

Les *loteries* sont à la base de la théorie originale de l'utilité espérée ainsi que de toutes les approches qui en découlent. Une loterie est un ensemble de couples constitués d'une valeur et de sa probabilité d'occurrence.

Soit  $X$  un ensemble de variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_m$  et  $x_1, x_2, \dots, x_m$  des valeurs possibles dont les probabilités respectives d'occurrence sont  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , avec :

---

<sup>1</sup> Références bibliographiques à la fin du chapitre 8 de l'ouvrage « Créativité et innovation : L'intelligence collective au service du management de projet ».

$$P = \{p_1, \dots, p_m\} \text{ et } \sum_{j=1}^m p_j = 1.$$

Une loterie est donc une distribution de probabilité définie comme suit :

$$L = \{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_m, p_m)\}$$

Une loterie peut être simple ou composée, dans le sens où elle fait appel à un seul tirage ou à des tirages combinés. Par commodité, on désignera par loterie la probabilité  $p_i$  d'occurrence de la valeur  $x_i$ .

Les approches fondées sur l'utilité espérée n'admettent que deux relations de préférence : la *préférence* et l'*indifférence*. Si  $A$  et  $B$  sont deux alternatives de décision, la première relation binaire est symétrique ( $A : B$  et  $B : A$ ), la seconde est asymétrique ( $A f B$  ou  $B f A$ ).

Si  $x_A$  est une des conséquences de la décision  $A$  et  $x_B$  une des conséquences de la décision  $B$ ,  $A f B$  signifie qu'on a une préférence pour l'alternative  $A$  dont la conséquence  $x_A$  est de probabilité  $p$  que pour l'alternative  $B$  dont la conséquence  $x_B$  est de probabilité  $q$ . Si on n'a aucune préférence pour  $A$  ou pour  $B$ , alors  $A : B$  ne correspond ni à  $A f B$ , ni à  $B f A$ .

### **D2.1.2 Utilités et probabilités**

Supposons que  $m$  conséquences découlent du choix d'une alternative de cours d'action  $A_i$  et qu'il est possible d'associer à ces conséquences les utilités  $u_1, u_2, \dots, u_m$ .

Si on désigne par  $p_{ik}$  la probabilité pour que l'alternative  $A_i$  produise la conséquence  $k$  d'utilité  $u_k$ , on a :

$$p_i = \{p_{i1}, \dots, p_{im}\} \text{ et } \sum_{k=1}^m p_{ik} = 1$$

Considérons deux alternatives de cours d'action  $A_i$  et  $A_j$  qu'on se propose de comparer par le biais des utilités espérées. L'écart entre l'espérance mathématique de leurs utilités espérées respectives est donné par :

$$E(A_i) - E(A_j) = \sum_{k=1}^m (p_{ik} - p_{jk}) u_k$$

En appliquant l'identité d'Abel pour la sommation par parties à l'expression précédente, on obtient :

$$E(A_i) - E(A_j) = \sum_{k=1}^{m-1} \left[ \sum_{l=1}^k (p_{il} - p_{jl}) \right] (u_k - u_{k+1})$$

Rappelons que pour des nombres réels quelconques  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ , la sommation par parties permet d'écrire :

$$\sum_{k=1}^m x_k y_k = \sum_{k=1}^{m-1} \left( \sum_{l=1}^k x_l \right) (y_k - y_{k+1}) + y_m \sum_{l=1}^m x_l$$

S'il est possible d'obtenir un classement par ordre croissant des utilités espérées, comme par exemple  $u_1 > u_2 > \dots > u_m$ , on peut conclure que  $E(A_i) > E(A_j)$  à la condition nécessaire et suffisante que :

$$p_i \neq p_j \text{ et } \sum_{l=1}^k p_{il} \geq \sum_{l=1}^k p_{jl} \text{ pour } k = 1, \dots, m.$$

Ainsi, la comparaison des utilités espérées et donc des alternatives, se réduit à la comparaison des probabilités cumulatives, à condition qu'il soit possible d'ordonner les utilités associées aux conséquences (Fishburn, 1992).

### D2.1.3 Hypothèses fondatrices

L'existence d'une fonction formalisant l'utilité espérée dans un contexte d'incertitude ou de risque, est subordonnée à la vérification pour les relations de préférence de trois axiomes fondamentaux, tels qu'énoncés par von Neumann et Morgenstern (2004).

(i) **Complétude et transitivité des relations de préférence**  $f$  et :

- **Complétude** : si  $p$  et  $q$  sont des distributions de probabilité, on a  $p f q$  ou  $q f p$ , ou  $p : q$ .
- **Transitivité** : si  $p, q, r$  sont des distributions de probabilités, on a :

Si  $p f q$  et  $q f r$  alors  $p f r$ , et si  $p : q$  et  $q : r$  alors  $p : r$ .

(ii) **Indépendance**

Soit la loterie composée suivante :

- Dans un premier temps, on a la possibilité de choisir l'occurrence  $p$  avec la probabilité  $\lambda$  ou l'occurrence  $r$  avec la probabilité  $1 - \lambda$ . La valeur espérée de cette loterie est  $\lambda p + (1 - \lambda)r$ .

- Ensuite, on compare cette loterie à une deuxième loterie en substituant  $q$  à  $p$ , et on obtient comme valeur espérée  $\lambda q + (1 - \lambda)r$ .

L'axiome d'indépendance stipule que si  $p$  est préférée à  $q$ , alors  $\lambda p + (1 - \lambda)r$  est préférée à  $\lambda q + (1 - \lambda)r$  pour toute occurrence et pour tout  $\lambda$  compris entre 0 et 1. Autrement dit, la relation de préférence entre les loteries  $p$  et  $q$  ne dépend pas de la loterie  $r$  et on a :

$$p \succ q, 0 < \lambda < 1, \text{ et } r \in P, \text{ alors } \lambda p + (1 - \lambda)r \succ \lambda q + (1 - \lambda)r.$$

C'est principalement cet axiome d'indépendance qui a suscité le plus de controverses du fait de ses violations répétées à la faveur d'expériences et de tests pratiques.

(iii) **Continuité**

Appelé aussi Axiome d'Archimède, il stipule que si trois loteries sont ordonnées au sens des préférences, il est possible d'encadrer la loterie intermédiaire en combinant la première et la troisième loterie au moyen de nombres réels compris strictement entre 0 et 1. Autrement dit, il existe deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que.

$$\text{Si } 0 < \alpha, \beta < 1 \text{ et } p \succ q \succ r, \text{ alors } \alpha p + (1 - \alpha)r \succ q \text{ et, } q \succ \beta p + (1 - \beta)r.$$

**D2.1.4 Implications des trois hypothèses fondamentales**

La principale implication de la vérification des hypothèses énoncées ci-dessus, est l'existence d'une fonction d'utilité  $V$  possédant les propriétés suivantes :

- Elle préserve l'ordre des préférences entre des alternatives risquées ; c'est-à-dire que si  $p$  est préféré à  $q$ , alors  $V(p)$  est préférée à  $V(q)$  :  $p \succ q$  alors  $V(p) \succ V(q)$ .
- Elle est « linéaire en probabilités », c'est-à-dire que :

$$V(\lambda p + (1 - \lambda)q) = \lambda V(p) + (1 - \lambda)V(q).$$

Cette propriété de linéarité est très importante parce qu'elle permet d'évaluer aisément les loteries composées en évaluant leurs composants.

De plus, une autre fonctionnelle  $V'$  définie sur  $P$  préserve l'ordre et possède la propriété de linéarité si et seulement si il existe une transformation affine positive de  $V$ , i.e.  $V'(p) = \alpha V(p) + \beta$ ,  $\forall p \in P$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant des nombres réels et  $\alpha > 0$ .

Finalement, si la relation de préférence  $f$  vérifie les axiomes et les propriétés qui en découlent telles exposées ci-dessous, on montre l'existence d'une fonction d'utilité  $U$  dont la forme générale est :

$$U(p) = \sum_{x \in X} p(x)V(x).$$

La fonction d'utilité espérée, dans le contexte des formulations multiattribut, vérifiant les hypothèses de transitivité, d'indépendance et de continuité prend donc la forme suivante :

$$U(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m p_j(x_j)V_j(x_j).$$

Dans cette expression,  $V_j$  est la fonction d'utilité partielle associée à la valeur  $x_j$  de l'attribut  $c_j$ , et  $U$  est la fonction d'utilité espérée associée à l'ensemble des attributs ou à l'objectif fondamental. Par commodité, on parle souvent d'*attribut* lorsqu'on utilise la valeur  $x_j$  de l'attribut  $c_j$ .

## **D2.2 Formes de la fonction d'utilité de synthèse**

### **D2.2.1 Nouvelles formulations de l'hypothèse d'indépendance des préférences**

Les hypothèses récentes portant sur l'indépendance des préférences, issues des débats initiés par les violations de l'axiome d'indépendance de von Neumann et Morgenstern, sont de deux sortes selon que les conséquences sont connues avec certitude ou pas.

- **Conséquences certaines**

Quand les conséquences sont connues avec certitude, les deux hypothèses d'indépendance sont relatives aux préférences et aux écarts de préférence. On dira qu'une paire d'attributs  $\{c_1, c_2\}$  est indépendante au plan *des préférences* par rapport aux attributs  $c_3, c_4, \dots, c_m$ , si l'ordre de préférence entre les conséquences de  $c_1$  et  $c_2$  ne dépend pas des niveaux fixés aux attributs  $c_3, c_4, \dots, c_m$ .

D'un autre côté, un attribut  $c_1$  est indépendant des attributs  $c_2, c_3, \dots, c_m$  au plan des *écarts de préférences*, si l'ordre des écarts de préférence entre deux niveaux de  $c_1$  ne dépend pas des niveaux fixés aux attributs  $c_2, c_3, \dots, c_m$ .

- **Conséquences incertaines**

Dans un contexte où les conséquences ne sont pas connues, ce qui correspond à des situations d'incertitude et de risque, les préférences pour des loteries sont utilisées au lieu des préférences pour des conséquences. Une loterie est spécifiée par un ensemble de conséquences possibles mutuellement exclusives et exhaustives collectivement et les probabilités associées aux occurrences de ces conséquences.

Dans ces conditions, les deux hypothèses d'indépendance portent sur l'utilité et les utilités additives.

Un attribut  $c_1$  est indépendant au plan de l'*utilité* des attributs  $c_2, c_3, \dots, c_m$ , si l'ordre de préférence pour les loteries relatives à  $c_1$  ne dépend pas des niveaux fixés aux attributs  $c_2, c_3, \dots, c_m$ . Cette condition concerne des loteries opérant sur plus d'un attribut.

Les attributs  $c_1, c_2, \dots, c_m$  sont indépendants au plan *additif* si l'ordre de préférence pour les loteries ne dépend pas des distributions conjointes de probabilités de ces loteries, mais dépend uniquement de leurs distributions de probabilités marginales.

L'indépendance additive est la condition de l'existence d'une fonction d'utilité du type :

$$U(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m w_j V_j(x_j)$$

### **D2.2.2 Exemple des formes additive et multiplicative**

De manière générale, les hypothèses d'indépendance, spécialement l'indépendance au plan des utilités, permettent d'exprimer la fonction d'utilité espérée sous une forme multilinéaire, et pour simplifier en se limitant à deux attributs, elle aurait la forme générale suivante :

$$v(x_1, x_2) = w_1 v_1(x_1) + w_2 v_2(x_2) + (1 - w_1 - w_2) v_1(x_1) v_2(x_2)$$

Si  $w_1$  et  $w_2$  sont normés, i.e.  $w_1 + w_2 = 1$ , on retrouve la forme additive, souvent utilisée dans les cas réels.

Soient deux attributs  $c_1$  et  $c_2$  de valeurs respectives  $x_1$  et  $x_2$  pour une alternative donnée.

Si on adopte la forme additive pour la synthèse sur les deux attributs, l'évaluation de l'alternative est donnée par :

$$v(x_1, x_2) = w_1 v_1(x_1) + w_2 v_2(x_2)$$

Si la valeur  $x_1$  est modifiée en  $x_1'$  et que  $x_2$  est maintenu constant, l'écart des évaluations ne dépend que de l'attribut  $c_1$  :

$$v(x_1, x_2) - v(x_1', x_2) = w_1 [v_1(x_1) - v_1(x_1')]$$

De même que si la forme multiplicative est utilisée pour la synthèse des évaluations, on a :

$$v(x_1, x_2) = w_1 w_2 v_1(x_1) v_2(x_2)$$

Si  $x_1$  est modifié en  $x_1'$  et que  $x_2$  est maintenu constant, l'écart relatif des évaluations ne dépend que de l'attribut  $c_1$  :

$$v(x_1, x_2) = w_1 w_2 v_1(x_1) v_2(x_2)$$

$$v(x_1', x_2) = w_1 w_2 v_1(x_1') v_2(x_2)$$

On obtient:

$$\frac{v(x_1, x_2) - v(x_1', x_2)}{v(x_1, x_2)} = \frac{v_1(x_1) - v_1(x_1')}{v_1(x_1)}$$

### D2.2.3 Formes opérationnelles

Nous allons donner une forme plus opérationnelle de ces fonctions d'utilité, en imposant que les valeurs des attributs et les valeurs de la fonction d'utilité vérifient les relations suivantes :

$$x_j^* \leq x_j \leq x_j^{**} \text{ et } 0 \leq v_j(x_j) \leq 1 \text{ et,}$$

$$v_j(x_j^*) = 0 \text{ et } v_j(x_j^{**}) = 1, \text{ si la fonction est croissante (maximisation d'un attribut)}$$

$$v_j(x_j^*) = 1 \text{ et } v_j(x_j^{**}) = 0, \text{ si la fonction est décroissante (minimisation d'un attribut).}$$

- Forme générale pour l'aversion au risque

On a :

$$v_j(x_j) = a + b(-e^{-\alpha x_j})$$

Puisque  $v_j(x_j^*) = 0$  et  $v_j(x_j^{**}) = 1$ , la forme de la fonction d'utilité croissante est parfaitement déterminée en résolvant en  $a$  et  $b$  le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a - be^{-\alpha x_j^*} = 0 \\ a - be^{-\alpha x_j^{**}} = 1 \end{cases}$$

On obtient :

$$a = \frac{1}{1 - e^{-\alpha(x_j^{**} - x_j^*)}}$$

$$b = \frac{e^{\alpha x_j^*}}{1 - e^{-\alpha(x_j^{**} - x_j^*)}}$$

La forme générale de la fonction d'utilité partielle dans le cas où elle est croissante est donnée par :

$$v_j(x_j) = \frac{1 - e^{-\alpha(x_j - x_j^*)}}{1 - e^{-\alpha(x_j^{**} - x_j^*)}}$$

On obtient de la même façon l'expression de la fonction d'utilité partielle dans le cas de décroissance :

$$v_j(x_j) = \frac{1 - e^{-\alpha(x_j - x_j^{**})}}{1 - e^{-\alpha(x_j^* - x_j^{**})}}$$

- Forme générale pour la neutralité face au risque

On a :

$$v_j(x_j) = a + b(\alpha x_j)$$

Après la normalisation entre 0 et 1, la forme générale pour le cas croissant est :

$$v_j(x_j) = \frac{x_j - x_j^*}{x_j^{**} - x_j^*};$$

et le cas décroissant :

$$v_j(x_j) = \frac{x_j - x^{**}}{x_j^* - x_j^{**}}$$

- **Forme générale pour la prédisposition au risque**

On a :

$$v_j(x_j) = a + b(e^{\alpha x_j})$$

La forme générale de la fonction d'utilité partielle dans un contexte de prédisposition à la prise de risque est déduite de façon similaire que celle de l'aversion pour le risque, en déterminant les expressions des constantes  $a$  et  $b$ .

On trouve pour le cas croissant :

$$v_j(x_j) = \frac{1 - e^{-\alpha(x_j - x_j^*)}}{1 - e^{-\alpha(x_j^{**} - x_j^*)}} ;$$

et pour le cas décroissant :

$$v_j(x_j) = \frac{1 - e^{\alpha(x_j - x_j^{**})}}{1 - e^{\alpha(x_j^* - x_j^{**})}}$$

Enfin, le niveau du paramètre  $\alpha$  permet d'ajuster l'ordre de grandeur des évaluations aux préférences du décideur.

## D3.

# PROCÉDURE D'EXPLOITATION D'ANALYTICAL HIERARCHY PROCESS

*Ce chapitre est un complément aux sections 9.1 à 9.4 de l'ouvrage cité en tête de ce document, et propose une description formalisée de la procédure d'exploitation d'Analytical Hierarchy Process, AHP en abrégé. La procédure est composée de deux blocs : le premier bloc peut être utilisé indifféremment pour pondérer les critères et les attributs ou évaluer les alternatives, alors que le deuxième bloc est dédié à l'agrégation des jugements.*

### D3.1 Principes

Rappelons que la décomposition hiérarchique dans sa forme la plus simple consiste à désagréger le but d'un problème de décision en critères et les critères en alternatives.

La procédure d'exploitation multicritère d'AHP consiste dans une première phase à déterminer les *priorités* ou poids des critères (bloc 1, niveau 1), et les *priorités* ou valeurs des alternatives à partir de celles des critères (bloc 2, niveau 2). Dans la procédure décrite ci-dessous (sect. D3.2), les *entités* désignent indifféremment les critères ou les alternatives.

La synthèse est effectuée dans une seconde phase en agrégeant de manière *additive* les priorités de chaque alternative sur l'ensemble des critères et ce selon deux modes au choix : le *mode distributif* ou le *mode idéal*.

Signalons que Thomas L. Saaty (1992, 1995, 2001)<sup>2</sup>, concepteur d'AHP, ne recommande pas l'agrégation multiplicative, alors que d'autres auteurs<sup>2</sup> mettent en œuvre l'agrégation multiplicative pour comparer AHP à SMART et ELECTRE. Rappelons que SMART est l'acronyme de « Simple Multiattribute Rating Technique » qui est une variante simplifiée de la théorie de la valeur multi-attribut ou MAVT, acronyme de « Multi-Attribute Value Theory ».

L'algorithme que nous proposons pour l'exploitation d'Analytical Hierarchy Process, décrit en encadré (sect. D3.2), est une formalisation que nous avons construite à partir de plusieurs études de cas traitées par Saaty.

### D3.2 Procédure

#### D3.2.1 Bloc de calcul des priorités commun aux niveaux 1 et 2

##### *Etape 1. Données*

Construction de la matrice carrée  $\mathbf{U} = (u_{ij})$  d'ordre  $m$  si les entités comparées sont des critères, ou d'ordre  $n$  si les entités comparées sont des alternatives.

Cette matrice des jugements par paires d'entités doit être positive et vérifier la condition de réciprocité. C'est-à-dire qu'on doit avoir :

$$u_{ij} > 0 \text{ et } u_{ij} \cdot u_{ji} = 1.$$

##### *Etape 2. Priorités*

Détermination de la priorité relative  $w_i$  de chaque entité mesurée selon l'échelle de ratio, en calculant le vecteur propre de la matrice  $\mathbf{U} = (u_{ij})$  par la résolution du système :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n u_{ij} w_j = \lambda_{\max} w_i & \text{pour } i=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{cases}$$

<sup>2</sup> Références bibliographiques à la fin du chapitre 9 de l'ouvrage « Créativité et innovation : L'intelligence collective au service du management de projet ».

**Etape 4. Consistance des jugements**

La validité de l'estimation des priorités  $w_i$  dépend du degré de consistance de la matrice des jugements par paires. Pour vérifier cette consistance, on applique la démarche suivante :

(1) Calcul de l'indice de consistance  $C.I.$  en utilisant successivement les relations :

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} w_j$$

$$C.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

(2) Détermination du coefficient  $\alpha$  par la lecture de la table des ratios aléatoires à l'aide du nombre d'entités  $n$  (Tableau 3-1).

(3) Détermination du ratio de consistance  $C.R.$  en utilisant la relation :

$$C.R. = \frac{C.I.}{\alpha}$$

(4) Si  $C.R. > 0.10$  alors il est nécessaire d'ajuster les jugements en procédant à une nouvelle consultation du décideur et des experts.

(5) Si  $0 < C.R. \leq 0.10$  les ajustements à apporter aux jugements seraient faibles par rapport aux composantes réelles du vecteur propre  $w$ . Dans ce cas on conclut à la validité du classement obtenu.

(6) Si  $C.I. = 0$  et donc  $C.R. = 0$ , du fait que  $\lambda_{\max} = n$ , alors les jugements sont totalement consistants et le classement obtenu peut être adopté. Néanmoins et dans tous les cas, seule l'analyse de sensibilité peut apporter une confirmation définitive de la validité du classement.

(7) Si on se situe au Niveau 1, répéter le Bloc de calcul des priorités pour chaque critère sur la base des comparaisons par paires des alternatives.

Tableau 3-1 Table des ratios aléatoires.

$n$ (alternatives)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ratio de consistance aléatoire ( $\alpha$ )	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

### D3.2.2 Bloc de synthèse (Niveau 2)

#### *Etape 5. Synthèse*

(1) Synthèse en **mode distributif** par la normalisation des priorités :

$$w'_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \text{ et } \sum_{i=1}^n w'_i = 1.$$

Par souci de clarté, notons  $w'$  par  $w$ .

(2) Synthèse en **mode idéal** en calculant de nouvelles priorités  $w'$  selon l'expression :

$$w'_i = \frac{w_i}{\text{Max}(w_i)_{i=1}^{i=n}}.$$

Pour plus de commodité,  $w'$  est notée  $w$ .

(3) **Agrégation additive** des priorités sur les critères :

Si  $P_i$  désigne la priorité ou évaluation finale de l'alternative  $A_i$ , on a :

$$P_i = \sum_{k=1}^m w_k u_{ik}.$$

#### *Etape 5. Synthèse des deux modes.*

(4) Il semble que dans AHP standard, la synthèse formelle des deux modes n'est pas prévue, et que la décision finale concernant le rang définitif de chaque alternative est laissée au décideur ou peut faire l'objet dans débat au sein d'un groupe d'experts. Pour notre part, nous proposons de réaliser une synthèse formelle entre les deux modes en appliquant une méthode utilisant des résultats issus de la théorie des graphes (sect. 7.8 de l'ouvrage et chap. 5 du présent document).

# D4.

## SURCLASSEMENT DE SYNTHÈSE, SEUILS ET PROCÉDURES D'EXPLOITATION

*Ce chapitre est consacré à l'approfondissement de certains aspects, comme la justification de la méthode de détermination des seuils et celle de la synthèse de deux classements, et surtout une description plus détaillée des procédures d'exploitation des principales méthodes utilisant l'approche générale du surclassement de synthèse due principalement à Bernard Roy (1993,1996). Cette approche privilégie, rappelons-le, une évaluation plus fine des alternatives fondée sur les notions d'indices de concordance et d'indices de discordance, et les comparaisons par paires d'alternatives, bien que cet aspect intervient tardivement dans le processus d'analyse. Ce chapitre est un complément aux sections 9.5 à 9.11 du chapitre 9, Partie 2, de l'ouvrage cité en tête de ce document.*

### D4.1 Détermination des seuils

Rappelons que si  $V(A)$  est le jugement porté sur l'alternative  $A$ , il est possible de définir une valeur par excès  $V^+(A)$ , une valeur par défaut  $V^-(A)$ , et une valeur centrale  $V^0(A)$  de ce jugement.

Il est possible d'exprimer les valeurs par défaut et par excès comme des combinaisons linéaires de la valeur centrale :

$$V^+(A) = V^0(A) + [\alpha_1 + \beta_1 V^0(A)] \quad (4.1)$$

$$V^-(A) = V^0(A) - [\alpha_2 + \beta_2 V^0(A)] \quad (4.2)$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  sont des nombres réels positifs compris entre 0 et 1.

#### **D4.1.1 Seuils d'indifférence $S(A)$**

Rappelons qu'il y a indifférence entre les alternatives  $A$  et  $B$  si :

$$-S(A) \leq V^0(A) - V^0(B) \leq S(A)$$

De même qu'on a :

$$V^+(A) \geq V^0(B) \quad (4.3)$$

et

$$V^0(A) \geq V^-(B) \quad (4.4)$$

La valeur minimale du seuil d'indifférence est donnée par :

$$V^0(A) + S(A) = V^0(B) \quad (4.5)$$

Partant de la relation (4.3), et en remplaçant  $V^+(A)$  par sa valeur (4.1), on a :

$$V^0(A) + [\alpha_1 + \beta_1 V^0(A)] \geq V^0(B)$$

En remplaçant  $V^0(B)$  par sa valeur (4.5), on a :

$$V^0(A) + [\alpha_1 + \beta_1 V^0(A)] \geq V^0(A) + S(A)$$

D'où :

$$S(A) \leq \alpha_1 + \beta_1 V^0(A)$$

Partant de la relation (4.4) et en remplaçant  $V^-(B)$  par sa valeur (4.2), on a :

$$V^0(A) \geq V^0(B) - [\alpha_2 + \beta_2 V^0(B)]$$

Il suffit maintenant de remplacer  $V^0(B)$  par son expression en fonction de  $V^0(A)$  (4.5) :

$$V^0(A) \geq V^0(A) + S(A) - \alpha_2 - \beta_2 [V^0(A) + S(A)]$$

D'où :

$$S(A) \leq \frac{\alpha_2 + \beta_2 V^0(A)}{1 - \beta_2}$$

En posant :  $V(A) = V^0(A)$ , puisque  $V^0(A)$  est considérée comme la meilleure estimation de  $V(A)$ , le seuil d'indifférence est finalement donné par :

$$S(A) = \text{Min} \left[ \alpha_1 + \beta_1 V(A); \frac{\alpha_2 + \beta_2 V(A)}{1 - \beta_2} \right] \quad (4.6)$$

#### **D4.1.2 Seuil de préférence stricte $P(A)$ et seuil de veto $Q(A)$**

Il existe une préférence stricte de l'alternative  $B$  sur l'alternative  $A$  si :

$$V(B) \geq V(A) \text{ et } V^-(B) > V^+(A)$$

La valeur minimale du seuil de préférence stricte correspond à l'expression :

$$V^0(B) = V^0(A) + P(A) \quad (4.7)$$

En remplaçant  $V^+(A)$  et  $V^-(B)$  par leurs expressions (4.1 ; 4.2), on obtient :

$$V^0(B) - [\alpha_2 + \beta_2 V^0(B)] - V^0(A) - [\alpha_1 + \beta_1 V^0(A)] > 0$$

En remplaçant  $V^0(B)$  par son expression en fonction de  $V^0(A)$  (4.7), on obtient :

$$V^0(A) + P(A) - [\alpha_2 + \beta_2 (V^0(A) + P(A))] - V^0(A) - [\alpha_1 + \beta_1 V^0(A)] > 0, \text{ et:}$$

$$P(A)(1 - \beta_2) > \alpha_2 + \beta_2 V^0(A) + \alpha_1 + \beta_1 V^0(A)$$

D'où :

$$P(A) > \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2)V^0(A)}{1 - \beta_2}$$

La valeur minimale du seuil de préférence stricte est donc :

$$P(A) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2)V^0(A)}{1 - \beta_2} \quad (4.8)$$

Quant au *seuil de veto*, il peut être défini comme un multiple du seuil de préférence :

$$Q(A) = \alpha P(A) \text{ avec } \alpha > 1$$

Ainsi, si l'écart de jugement entre une alternative  $B$  et l'alternative  $A$  est plus grand que le seuil de veto,  $A$  est éliminée au profit de  $B$ .

### **D4.1.3 Seuils indépendants des alternatives**

Nous pensons qu'il est inutile d'utiliser des seuils par alternative, dans le cas où les évaluations sur un critère ne sont pas trop distantes. Dans le cas contraire, il convient peut être d'affiner la sélection des alternatives considérées comme efficaces ou potentielles.

On peut extraire des seuils indépendants des alternatives, et donc associés uniquement à chaque critère, en adoptant le seuil le plus élevé et le seuil le plus faible parmi les seuils calculés selon les relations (4.6) et (4.8) pour chaque alternative  $A$ .

L'exploitation de la méthode d'analyse permet d'obtenir deux classements dont la validité pourrait être testée en faisant varier le seuil entre les deux extremums.

Ainsi, le *seuil d'indifférence* pourrait prendre les valeurs :

$$S_1 = \underset{A}{\text{Min}} \left[ \alpha_1 + \beta_1 V(A); \frac{\alpha_2 + \beta_2 V(A)}{1 - \beta_2} \right]$$

$$S_2 = \underset{A}{\text{Max}} \left[ \alpha_1 + \beta_1 V(A); \frac{\alpha_2 + \beta_2 V(A)}{1 - \beta_2} \right]$$

et pour l'analyse de sensibilité, on fera varier  $S(A)$  dans l'intervalle  $[S_1; S_2]$ .

Le seuil de préférence pourrait quant à lui prendre les valeurs :

$$P_1 = \underset{A}{\text{Min}} \left[ \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2) V^0(A)}{1 - \beta_2} \right]$$

$$P_2 = \underset{A}{\text{Max}} \left[ \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2) V^0(A)}{1 - \beta_2} \right]$$

Pour l'analyse de sensibilité, on fera varier le seuil de préférence stricte dans l'intervalle  $[P_1; P_2]$ .

### **D4.2 Procédures d'exploitation d'ELECTRE I, II, IS**

ELECTRE I est la procédure d'exploitation multicritère la plus ancienne, suivie d'ELECTRE II et d'ELECTRE IS. Nous nous proposons de les décrire brièvement pour un rappel des origines conceptuelles du surclassement de synthèse et pour l'histoire, sachant que les procédures les plus utilisées aujourd'hui sont ELECTRE IV, ELECTRE TRI, et surtout

ELECTRE III qui a connu plusieurs applications et dont nous donnerons une description détaillée.

Bernard Roy lui-même a dit à propos d'ELECTRE I, que son examen est surtout profitable au plan pédagogique pour bien aborder le surclassement de synthèse, plutôt que pour une application pratique.

#### **D4.2.1 ELECTRE I**

La procédure d'exploitation multicritère ELECTRE I, dans sa version initiale, est fondée sur deux notions de base : l'indice de concordance et l'indice de discordance.

Si on considère l'hypothèse « l'alternative  $A_i$  surclasse l'alternative  $A_j$  », c'est-à-dire que  $A_i$  est au moins aussi bonne que  $A_j$ , on dit qu'un critère est **concordant** s'il vérifie cette hypothèse, sinon on dit qu'il est **discordant**.

Dans ces conditions la validité de l'hypothèse de surclassement est caractérisée par l'importance des critères concordants par rapport aux critères discordants, ce que vise la détermination des indices.

L'**indice de concordance** est défini comme la somme des poids normés des critères concordants, c'est-à-dire vérifiant l'hypothèse  $A_i$  surclasse  $A_j$ , notée :

$$A_i \sum A_j$$

Autrement dit, si  $I_{ij}$  désigne cet indice de concordance et  $K_c$  l'ensemble des indices des critères concordants, sachant que  $W$  est la somme des poids  $w_k$  de tous les critères, on peut écrire :

$$I_{ij} = \frac{\sum_{k \in K_c} w_k}{W} \quad (4.9)$$

$$\text{où } W = \sum_{k=1}^m w_k \text{ et } 0 \leq I_{ij} \leq 1$$

La normalisation vise simplement à imposer que l'indice de concordance varie entre 0 et 1.

L'**indice de discordance** est défini comme le rapport entre le plus grand écart d'évaluation entre  $A_i$  et  $A_j$  sur les critères discordants et du plus grand écart entre l'échelon supérieur et l'échelon inférieur de l'échelle de mesure de l'évaluation des alternatives sur les critères.

L'introduction des échelons dans la définition de l'indice de discordance a pour objectif d'obtenir un indice compris entre 0 et 1.

Le paramètre le plus important est en fait l'écart d'évaluation sur les critères discordants.

Si  $D_{ij}$  désigne cet indice de discordance,  $e_{k,\min}$  et  $e_{k,\max}$  respectivement le plus grand et le plus petit échelon de l'échelle de mesure associée au critère  $k$ ; ( $V_{ik}-V_{jk}$ ) l'écart d'évaluation sur le critère  $k$  entre  $A_i$  et  $A_j$ ; alors la valeur de l'indice de discordance est donnée par l'expression :

$$D_{ij} = \frac{\text{Max}_k (V_{ik} - V_{jk})}{\text{Max}_k (e_{k,\max} - e_{k,\min})} \quad (4.10)$$

Notons que cette formulation de l'indice de discordance est inacceptable parce que l'indice dépendrait des échelles d'évaluation qui peuvent changer avec le temps ou les préférences du décideur. Le degré de dominance d'une alternative ne peut dépendre d'une échelle d'évaluation.

Ainsi, la formulation (4.10) n'est applicable que si les échelles de mesure associées à la totalité des critères sont identiques.

Si  $S_c$  est le seuil minimal de concordance et  $S_d$  le seuil maximal de discordance, les conditions pour que l'hypothèse «  $A_i$  surclasse  $A_j$  » soit valide sont :

$$I_{ij} \geq S_c \text{ et } D_{ij} \leq S_d .$$

Les intervalles dans lesquels peuvent être choisis les seuils de concordance et de discordance sont :

$$\frac{1}{2} \leq S_c \leq 1 - \frac{\text{Min}_k w_k}{W} \text{ et } S_d < \frac{1}{2}$$

Notons que le test de concordance doit être mené en premier, et il faut qu'il soit positif pour qu'un test de discordance soit effectué. Ceci veut dire que la condition de concordance est nécessaire pour envisager de discuter de la validité de l'hypothèse de surclassement à la faveur des résultats du test de discordance.

La dernière version que B. Roy propose supprime la condition de discordance, en raison de ses limitations, et la remplace par une condition de veto :

$$V_{ik} - V_{jk} \geq Q_{ik}$$

$Q_{ik}$  est le seuil de veto associé à l'alternative  $A_i$  et au critère  $k$ .

#### D4.2.2 ELECTRE II

Cette procédure d'exploitation multicritère propose la prise en compte de deux seuils de concordance  $S_{1c}$  et  $S_{2c}$  et un seuil de veto  $Q_{ik}$  associé à l'alternative  $A_i$  et au critère  $k$ .

Les seuils de concordance vérifient les conditions :

$$S_{c1} > S_{c2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \leq S_{c1} \leq 1 - \frac{\text{Min}_k w_k}{W} \quad \text{avec} \quad W = \sum_{k=1}^m w_k$$

Les deux seuils de concordance sont constants, et dans le cas où ils varient le long de l'échelle du critère, les formulations ci-dessous doivent être revues.

L'indice de concordance est défini comme pour ELECTRE I (4.10).  $\mathbf{X}$  est la matrice binaire associée à l'hypothèse  $A_i \sum A_j$  et définie comme suit :

$$\mathbf{X} = \{x_{ij}^k\} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{Si } V_{ik} - V_{jk} \geq -S_{ik} \text{ alors } x_{ij}^k = 1 \\ \text{Sinon } x_{ij}^k = 0 \end{cases} \quad (\text{surclassement } A_i \text{ sur } A_j)$$

Rappelons que  $S_{ik}$  est le seuil d'indifférence associé à l'alternative  $A_i$  et au critère  $k$ . Si ce seuil est indépendant des alternatives, on le notera  $S_k$ .

$\mathbf{Y}$  est la matrice binaire associée à l'hypothèse inverse  $A_j \sum A_i$  et définie comme suit :

$$\mathbf{Y} = \{y_{ij}^k\} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{Si } V_{jk} - V_{ik} \geq -S_{jk} \text{ alors } y_{ij}^k = 1 \\ \text{Sinon } y_{ij}^k = 0 \end{cases} \quad (\text{surclassement } A_j \text{ sur } A_i)$$

Les conditions de vérification de l'hypothèse  $A_i \sum A_j$  dans le cas de l'utilisation d'ELECTRE II sont les suivantes :

- **Condition de concordance**

$$\frac{\sum_{k=1}^m w_k x_{ij}^k}{W} \geq S_{1c} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^m w_k x_{ij}^k \geq \sum_{k=1}^m w_k y_{ij}^k$$

Cette condition signifie que le surclassement est fort ou fortement crédible.

$$\frac{\sum_{k=1}^m w_k x_{ij}^k}{W} \geq S_{2c} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^m w_k x_{ij}^k \geq \sum_{k=1}^m w_k y_{ij}^k$$

Cette deuxième condition indique que le surclassement est faible ou faiblement crédible.

- **Condition de non veto :**

$$\forall k, V_{ik} - V_{jk} \leq Q_{ik}$$

### D4.2.3 ELECTRE IS

Les propriétés des critères comprennent les poids, un seuil de préférence, un seuil d'indifférence et un seuil de veto.

Les seuils peuvent varier le long de l'échelle des critères et on peut agir sur le seuil de veto pour augmenter ou diminuer l'importance de l'ensemble des critères concordants, qu'on désigne sous le vocable de « coalition concordante ».

La démarche de mise en œuvre d'ELECTRE IS est décrite ci-dessous.

#### **Etape 1. Calcul de l'indice de concordance**

Posons:  $X = \{x_{ij}^k\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$  et  $Y = \{y_{ij}^k\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$

Si  $A_i \sum A_j$ , i.e. si  $V_{ik} + S_{ik} \geq V_{jk}$  alors  $x_{ij} = 1$  (surclassement  $A_i$  sur  $A_j$ )

Sinon  $x_{ij} = 0$

Si  $A_j f^< A_i$ , i.e. si  $V_{ik} + S_{ik} < V_{jk} \leq V_{ik} + P_{ik}$  alors  $y_{ij}^k = 1$  (préférence faible  $A_j$  sur  $A_i$ )

Sinon  $y_{ij}^k = 0$

L'indice de concordance relatif à l'hypothèse  $A_i f^> A_j$  est donné par les formules:

$$I_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m w_k x_{ij}^k + \sum_{k=1}^m \varphi_k w_k y_{ij}^k}{W} \quad \text{avec} \quad \varphi_k = \frac{V_{ik} + P_{ik} - V_{jk}}{P_{ik} - S_{ik}} \quad \text{et} \quad W = \sum_{k=1}^m w_k$$

Rappelons que  $S_{ik}$  et  $S_{jk}$  sont respectivement les seuils d'indifférence associés aux alternatives  $A_i$  et  $A_j$ , et  $P_{jk}$  est le seuil de préférence stricte associé à l'alternative  $A_j$ . Chacun de ces seuils caractérise un critère précis  $k$ .  $I_{ij}$  est l'indice de concordance découlant de l'hypothèse  $A_i \sum A_j$ .

L'introduction du paramètre  $\varphi_k$  dans le calcul de l'indice de concordance est justifiée du fait de l'homothétie des triangles (T1,T2,T4) et (T1,T3,T5) traduisant schématiquement (Fig. 4-1) la relation de préférence faible  $A_j \succ^< A_i$  mentionnée à l'étape 1.

On a :

$$\varphi_k = \frac{V_{ik} + P_{ik} - V_{jk}}{V_{ik} + P_{ik} - V_{ik} - S_{ik}} = \frac{V_{ik} + P_{jk} - V_{jk}}{P_{ik} - S_{ik}}$$

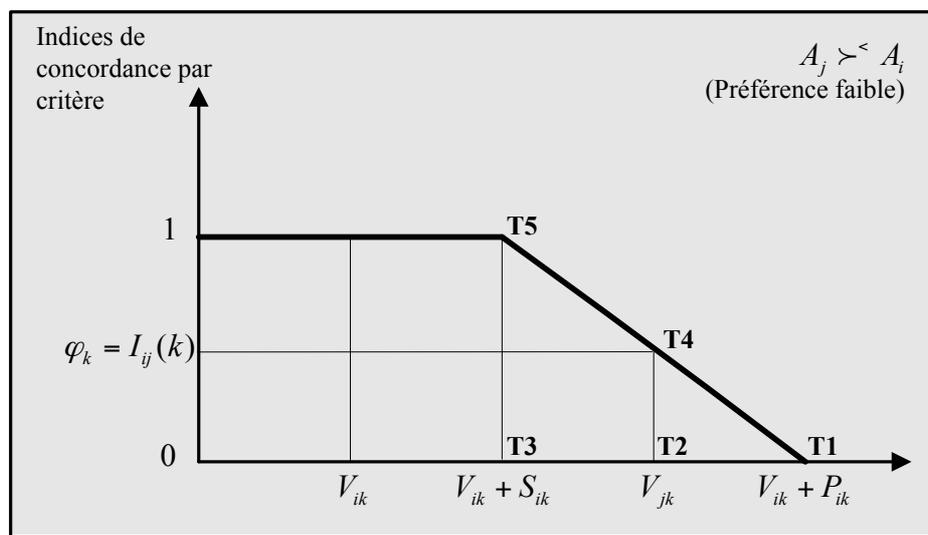


Fig. 4-1 Illustration de l'indice de concordance.

**Etape 2. Vérification de l'hypothèse  $A_i \succ A_j$**

Si  $S_c$  est le niveau minimal de concordance exigé, il faut que :

$$I_{ij} \geq S_c \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} \leq S_c \leq 1 - \frac{\text{Min } w_k}{W}$$

**Etape 3. Vérification de la condition de non veto**

$$V_{ik} + Q_{ik} \geq V_{jk} + \lambda \quad \text{avec} \quad 0 \leq \lambda \leq S_{ik}$$

Le paramètre  $\lambda$  est destiné à renforcer l'effet de veto dans le cas où la condition de concordance faiblit, sinon on lui attribue la valeur 0.

### D4.3 Procédure d'exploitation d'ELECTRE III

L'algorithme que nous présentons ci-dessous (sect. D4.3) ainsi que le diagramme logique consacré aux distillations (Fig. 4-3) fournissent un éclairage à l'exposé général de la méthode ELECTRE III contenu dans la section 9.7 du chapitre 9 de l'ouvrage, ainsi qu'une grille de lecture de l'exemple d'application traité en section 9.8.

#### D4.3.1 Procédure détaillée

##### Etape 1 : Calcul de l'indice de concordance $I_{ij}$

Posons:  $X = \{x_{ij}^k\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$  et  $Y = \{y_{ij}^k\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$

Si  $A_i \pm A_j$ , i.e. si  $V_{ik} + S_{ik} \geq V_{jk}$  alors  $x_{ij} = 1$  (surclassement  $A_i$  sur  $A_j$ )

Sinon  $x_{ij} = 0$

Si  $A_j \prec A_i$ , i.e. si  $V_{ik} + S_{ik} < V_{jk} \leq V_{ik} + P_{ik}$  alors  $y_{ij}^k = 1$  (préférence faible de  $A_j$  sur  $A_i$ )

Sinon  $y_{ij}^k = 0$

Notons que l'indice de concordance d'ELECTRE III est identique à celui d'ELECTRE IS  
L'indice de concordance relatif à l'hypothèse  $A_i \pm A_j$  est donné par la formule: e s t a a  
(sect. 4.2.3, étape 1).

$$I_{ij} = \frac{1}{W} \sum_{k=1}^m w_k (x_{ij}^k + \phi_k y_{ij}^k) \quad \text{et} \quad W = \sum_{k=1}^m w_k$$

##### Etape 2 : Calcul de l'indice de discordance $D_{ij}(k) = \frac{V_{ik} + P_{ik} - V_{jk}}{P_{ik} - S_{ik}} \text{ et } (x_{ij}^k, y_{ij}^k) \neq (0,0) \forall (i, j, k)$

L'indice de discordance associé à l'hypothèse  $A_i \sum A_j$  et pour le critère  $k$ , est désigné par

$D_{ij}(k)$ .

$D_{ij}(k)$  est variable et varie dans l'intervalle  $[0,1]$

Si  $D_{ij}(k) = 1$ , le critère  $k$  met son veto au surclassement  $A_i \sum A_j$

Si  $D_{ij}(k) = 0$ , le critère  $k$  n'est pas discordant pour le suclassement  $A_i \sum A_j$

Autrement dit:

Si  $V_{jk} > V_{ik} + Q_{ik}$  alors  $D_{ij}(k) = 1$

Sinon

Si  $V_{jk} \leq V_{ik} + P_{ik}$  alors  $D_{ij}(k) = 0$

Sinon 
$$D_{ij}(k) = \frac{V_{jk} - V_{ik} - P_{ik}}{Q_{ik} - P_{ik}}$$

**Etape 3 : Calcul de l'indice de crédibilité  $\sigma_{ij} = \sigma(A_i, A_j)$**

Si  $D_{ij}(k) > I_{ij}$  alors 
$$\sigma_{ij} = I_{ij} \cdot \prod_{k=1}^m \frac{1 - D_{ij}(k)}{1 - I_{ij}}$$

Les règles de séparation des alternatives peuvent être, par exemple, les suivantes :

. Surclassement:

Si  $\sigma_{ij} = 1$  alors  $A_i \pm A_j$ .

. Indifférence:

Si  $\sigma_{ij} + \sigma_{ji} = 2$  alors  $A_i : A_j$ .

. Indifférence à incomparabilité:

Si  $\sigma_{ij} + \sigma_{ji}$  décroît avec  $\sigma_{ij} (; \sigma_{ji})$  alors  $A_i : A_j$  à  $A_i ? A_j$ .

La figure ci-dessous représente les quatre situations selon la variation de l'indice de crédibilité  $\sigma_{ij}$  relatif à l'hypothèse  $A_i \pm a_j$  et l'indice de crédibilité  $\sigma_{ji}$  relatif à l'hypothèse  $A_j \pm a_i$  (Fig. 4-2).

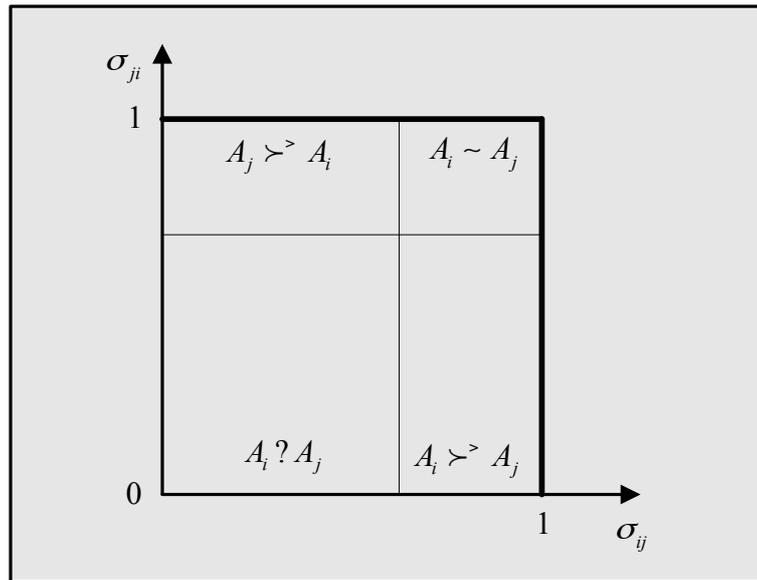


Fig. 4-2 Les quatre situations selon la valeur de l'indice de crédibilité.

#### Etape 4 : Détermination du seuil de discrimination de l'indice de crédibilité

La solidité d'un surclassement par rapport à un autre ne peut être établie seulement en comparant les valeurs absolues des indices de crédibilité.

Si  $(A_{i_1}, A_{j_1})$  et  $(A_{i_2}, A_{j_2})$  sont deux paires d'alternatives telles que :  $A_{i_1} \pm A_{j_1}$  et  $A_{i_2} \pm A_{j_2}$ , le fait que les indices de crédibilité associés vérifient :  $\sigma_{i_1 j_1} > \sigma_{i_2 j_2}$ , ne signifie pas de manière indiscutable que le premier surclassement est plus crédible que le second, car l'indice de crédibilité n'est pas un critère absolu. D'où la nécessité d'introduire un seuil de discrimination de cet indice noté  $S_{ij}^\sigma = S^\sigma(A_i, A_j)$ . Sous certaines hypothèses, B. Roy (1993, p. 418) propose de poser :  $S_{ij}^\sigma = 0,30 - 0,15\sigma_{ij}$

On peut ainsi avancer que les couples  $(A_i, A_j)$ , i.e.  $A_i \pm A_j$ , vérifiant les conditions  $\sigma(A_i, A_j) > \sigma(A_j, A_i) + S_{ij}^\sigma$  et  $\sigma(A_i, A_j) > \lambda$  avec  $\lambda = \sigma(A_j, A_i)$ , sont considérés comme des surclassements solides.

**Etape 5 : Exécution de la distillation descendante et de la distillation ascendante**

(1) Initialisation de l'ensemble des processus de distillation

$$r = 1 \quad \{r : \text{rang d'un distillat final d'un processus de distillation}\}$$

$$Z_0 = \emptyset$$

(2) Initialisation d'un processus de distillation

$$l = 1$$

$$\lambda_l = \max_{ij} \sigma_{ij}, \quad \forall (A_i, A_j) \in D_l \times D_l$$

$$Z = \bigcup_{h=0}^{r-1} Z_h$$

$$D_l = A \setminus Z$$

Si  $D_l = \emptyset$  alors aller en (8)  
Sinon aller en (3)

(3) Test d'arrêt d'un processus de distillation

Si  $\lambda_l = 0$  ou  $\text{card}(D_l) = 1$  alors

$$\left[ \begin{array}{l} Z_{r-1} = D_l \quad \{Z_{r-1} : \text{distillat final d'un processus de distillation}\} \\ Z \leftarrow Z \cup Z_{r-1} \\ r = r + 1 \\ \text{aller en (2)} \end{array} \right.$$

Sinon

$$\left[ \begin{array}{l} l \leftarrow l + 1 \\ D_{l-1} = D_l \\ \text{Aller en (4)} \end{array} \right.$$

(4) Déterminer la quantité  $q_i^{\lambda_{t+1}}$ , appelée  $\lambda_{t+1}$ -qualification, comme suit :

$$\forall (A_i, A_j) \in D_l \times D_l :$$

$LP_i^{\lambda_{t+1}}$  vecteur des alternatives  $A_j$  auxquelles  $A_i$  est  $\lambda_{t+1}$ -préférée

$LF_i^{\lambda_{t+1}}$  vecteur des alternatives  $A_j$  qui sont  $\lambda_{t+1}$ -préférées à  $A_i$

Si  $A_j$  vérifie :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{ij} - S_{ij}^\sigma > \sigma_{ji} \\ \text{et} \\ \sigma_{ij} > \lambda_l \end{array} \right\} \text{ alors } A_j \in LP_i^{\lambda_{l+1}}$$

Sinon  $A_j \in LF_i^{\lambda_{l+1}}$

Le nombre  $Card(LP_i^{\lambda_{l+1}})$  est la mesure de la  $\lambda_{l+1}$  - *puissance* de  $A_i$

Le nombre  $Card(LF_i^{\lambda_{l+1}})$  est la mesure de la  $\lambda_{l+1}$  - *faiblesse* de  $A_i$

La  $\lambda_{l+1}$  - *qualification* est mesurée par la quantité:

$$q_i^{\lambda_{l+1}} = Card(LP_i^{\lambda_{l+1}}) - Card(LF_i^{\lambda_{l+1}})$$

(5) Construire le distillat  $D_{l+1}$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } D_{l+1} \subset D_l : \\ \text{Si la distillation est descendante : } q_{\max}^{\lambda_{l+1}} = \max_i q_i^{\lambda_{l+1}} \\ \text{Si } A_i \in D_l \text{ et } q_i^{\lambda_{l+1}} = q_{\max}^{\lambda_{l+1}} \text{ alors } A_i \in D_{l+1} \\ \text{Si la distillation est ascendante : } q_{\min}^{\lambda_{l+1}} = \min_i q_i^{\lambda_{l+1}} \\ \text{Si } A_i \in D_l \text{ et } q_i^{\lambda_{l+1}} = q_{\min}^{\lambda_{l+1}} \text{ alors } A_i \in D_{l+1} \end{array} \right.$$

(6) Déterminer le nouveau palier de séparation  $\lambda_{l+1}$  :

Si  $\sigma_{ij} \geq \lambda_l - S_{ij}^\sigma$  alors  $\lambda_{l+1} = 0, \forall (A_i, A_j) \in D_l \times D_l$

Sinon

$$\left[ \begin{array}{l} \lambda_{l+1} = \max_{ij} \sigma_{ij}, \forall (A_i, A_j) \in D_l \times D_l, \text{ vérifiant :} \\ \sigma_{ij} < \lambda_l - S_{ij}^\sigma, \end{array} \right.$$

(7) Initialisation d'une nouvelle distillation :

$$D_l \leftarrow D_{l+1}$$

$$\lambda_l = \lambda_{l+1}$$

Aller en (3)

(8) Formation du classement descendant ou ascendant

$Z = \bigcup_{h=1}^{r-1} Z_h$  est le classement obtenu à la fin de l'ensemble des processus de distillation.

*Dans le cas d'une distillation descendante* : le préordre  $Z_1 = Z$  est constitué de classes d'équivalences affectées chacune d'un rang, des meilleures aux moins bonnes.

*Dans le cas d'une distillation ascendante* : le préordre  $Z_2 = Z$  est constitué de classes d'équivalences affectées chacune d'un rang, des moins bonnes aux meilleures.

### **Etape 6 : Construction des classements finaux**

Les classements finaux, c'est à dire le préordre partiel<sup>3</sup> et le préordre complet<sup>4</sup>, sont obtenus en appliquant la procédure de détermination de la synthèse de deux classements (sect. 7.8 de l'ouvrage et chap. 5 du présent document).

---

<sup>3</sup> Préordre partiel : classement admettant l'indifférence, la préférence et l'incomparabilité.

<sup>4</sup> Préordre complet : classement admettant l'indifférence et la préférence.

D4.3.2 Diagramme logique des distillations

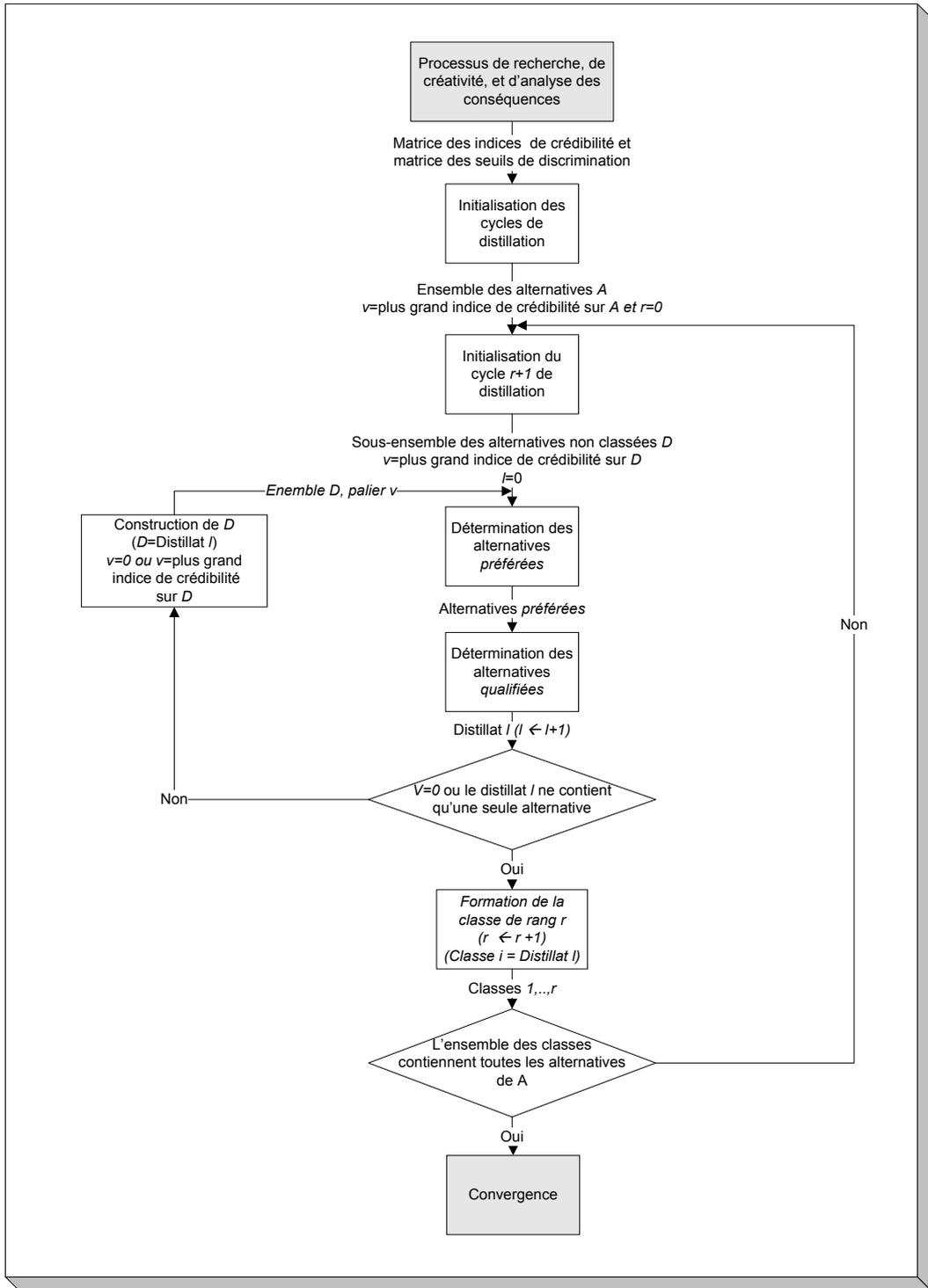


Fig. 4-3 Diagramme logique des distillations d'ELECTRE III.

## D4.4 ELECTRE IV

### D4.4.1 Principes

Les conditions d'application d'ELECTRE IV sont identiques à celles d'ELECTRE III à la différence près que cette méthode ne tient pas compte des poids des critères. Cela peut être très utile dans les cas où il n'est pas possible de les déterminer de façon relativement précise, ou lorsque le décideur ne souhaite pas faire une différenciation entre les critères en terme d'importance.

Il est clair qu'en l'absence des poids, on ne peut considérer l'indice de crédibilité tel qu'utilisé dans ELECTRE III, comme un moyen sûr de vérifier la solidité d'un surclassement, même en cherchant à attribuer aux critères des poids égaux à une certaine valeur, ce qui revient finalement à les intégrer dans le processus.

Pour éviter toute référence aux poids, on introduit une séquence de cinq systèmes de préférences emboîtés qui permettent d'établir un préordre partiel sur l'ensemble des alternatives. Les cinq relations de surclassement, qualifiées de *floues* et associées à chaque système de préférences sont représentées par les symboles :  $f^1, f^2, f^3, f^4, f^5$ .

Elles impliquent de manière générale la vérification de deux types de conditions : une condition de limitation de la discordance et une condition de concordance.

Soit  $(A_i, A_j)$  une paire d'alternatives. On s'intéresse à l'hypothèse «  $A_i$  surclasse  $A_j$  » au sens de chacune des relations floues de surclassement, en examinant cette hypothèse sur chaque critère.

(1) **Quasi-dominance** :  $A_i f^1 A_j$ .

- *Condition de limitation de la discordance* : aucun cas de préférence stricte ou faible de  $A_j$  sur  $A_i$ .
- *Condition de concordance* : le nombre de cas de *préférence sans seuil* de  $A_i$  sur  $A_j$  est supérieur au nombre de cas de *préférence sans seuil* de  $A_j$  sur  $A_i$ .

De façon générale, on a :

$$A_i f^1 A_j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{card}(A_j f A_i) = 0 \text{ ou } V_{jk} - V_{ik} \leq S_k \text{ pour } k = 1 \dots m \\ \text{card}(A_i f^0 A_j) > \text{card}(A_j f^0 A_i) \end{array} \right\}$$

(2) **Dominance canonique** :  $A_i f^2 A_j$ .

- *Condition de limitation de la discordance* : aucun cas de préférence stricte de  $A_j$  sur  $A_i$ .
- *Condition de concordance* : 1) le nombre de cas de préférence sans seuil de  $A_i$  sur  $A_j$  est supérieur au nombre de cas de préférence sans seuil de  $A_j$  sur  $A_i$  ; 2) le nombre de cas de préférence stricte de  $A_i$  sur  $A_j$  est supérieur ou égal au nombre de cas de préférence faible de  $A_j$  sur  $A_i$ .

Ces deux conditions sont formalisées comme suit :

$$A_i f^2 A_j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{card}(A_j f^> A_i) = 0 \text{ ou } V_{jk} - V_{ik} \leq P_k \text{ pour } k = 1 \dots m \\ \text{card}(A_i f^0 A_j) > \text{card}(A_j f^0 A_i) \\ \text{card}(A_i f^> A_j) \geq \text{card}(A_j f^< A_i) \end{array} \right\}$$

(3) **Surclassement de type 1** :  $A_i f^3 A_j$ .

- *Condition de limitation de la discordance* : aucun cas de préférence stricte de  $A_j$  sur  $A_i$ .
- *Condition de concordance* : le nombre de cas de préférence sans seuil de  $A_i$  sur  $A_j$  est supérieur ou égal au nombre de cas de préférence faible de  $A_j$  sur  $A_i$ .

$$A_i f^3 A_j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{card}(A_j f^> A_i) = 0 \text{ ou } V_{jk} - V_{ik} \leq P_k \text{ pour } k = 1 \dots m \\ \text{card}(A_i f^0 A_j) \geq \text{card}(A_j f^< A_i) \end{array} \right\}$$

(4) **Surclassement de type 2** :  $A_i f^4 A_j$ .

- *Condition de limitation de la discordance* : aucun cas de préférence stricte de  $A_j$  sur  $A_i$ :

$$A_i f^4 A_j \Leftrightarrow \left\{ \text{card}(A_j f^> A_i) = 0 \text{ ou } V_{jk} - V_{ik} \leq P_k \text{ pour } k = 1 \dots m \right\}$$

- *Pas de condition de concordance.*

(5) **Surclassement de type 3** :  $A_i f^5 A_j$ .

- *Conditions de limitation de la discordance* : 1) le nombre de cas de préférence stricte est inférieur ou égal à l'unité (zéro ou un) ; 2) l'écart de jugement entre  $A_j$  et  $A_i$  est inférieur ou égal au seuil de veto.

$$A_i f^s A_j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{card}(A_j f^> A_i) = 0 \text{ ou } V_{jk} - V_{ik} \leq P_k \text{ pour } k = 1 \dots m \\ \text{ou} \left[ \begin{array}{l} \text{card}(A_j f^> A_i) = 1 \text{ et } \text{card}(A_i f^> A_j) \geq n/2 \text{ et} \\ V_{ik} - V_{jk} \geq Q_k, \text{ pour } k = 1 \dots m \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

- *Pas de condition de concordance.*

Finally, ELECTRE IV consists in executing, in its principle, the process of distillation of ELECTRE III, but this time, it is the fuzzy relations defined above that allow the formation of different distillates and the final ranking, by the bias of the comparison of the number of alternatives that  $A_i$  outclasses and the number of alternatives that outclass  $A_i$ .

#### **D4.4.2 Procédure opérationnelle**

**Etape 1 : Construction des cinq relations de surclassement**

$S^1, S^2, S^3, S^4, S^5$  telles que définies dans la sous-section précédente (sect. D4.4.1)

**Etape 2 : Exécution de la distillation descendante et de la distillation ascendante.**

(1) Initialisation de l'ensemble des processus de distillation

$$r = 1 \quad \{r : \text{rang d'un distillat final d'un processus de distillation}\}$$

$$Z_0 = \emptyset$$

(2) Initialisation d'un processus de distillation

$$l = 1$$

$$s = 1$$

$$Z = \bigcup_{h=0}^{r-1} Z_h$$

$$D_l = A \setminus Z$$

Si  $D_l = \emptyset$  alors aller en (7)

(3) Test d'arrêt d'un processus de distillation

$Z_{r-1}$  désigne le distillat final d'un processus de distillation.

Si  $s = 5$  ou  $\text{card}(D_i) = 1$  alors :

$$\left[ \begin{array}{l} Z_{r-1} = D_l \\ Z \leftarrow Z \cup Z_{r-1} \\ r = r + 1 \\ \text{aller en (2)} \end{array} \right.$$

Sinon :

$$\left[ \begin{array}{l} l \leftarrow l + 1 \\ D_{l-1} = D_l \\ \text{Aller en (4)} \end{array} \right.$$

(4) Déterminer la  $s$ -qualification ( $q_i^s$ ) comme suit :

$$\forall (A_i, A_j) \in D_l \times D_l :$$

$LP_i^s$  vecteur des alternatives  $A_j$  auxquelles  $A_i$  est  $s$ -préférée

$LF_i^s$  vecteur des alternatives  $A_j$  qui sont  $s$ -préférées à  $A_i$

Le nombre  $\text{Card}(LP_i^s)$  est la mesure de la  $s$ -puissance de  $A_i$

Le nombre  $\text{Card}(LF_i^s)$  est la mesure de la  $s$ -faiblesse de  $A_i$

La  $s$ -qualification est mesurée par la quantité:

$$q_i^s = \text{Card}(LP_i^s) - \text{Card}(LF_i^s)$$

(5) Construire le distillat  $D_{l+1}$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } D_{l+1} \subset D_l : \\ \quad \text{Si la distillation est descendante : } q_{\max}^s = \max_i q_i^s \\ \quad \quad \text{Si } A_i \in D_l \text{ et } q_i^s = q_{\max}^s \text{ alors } A_i \in D_{l+1} \\ \quad \text{Si la distillation est ascendante : } q_{\min}^s = \min_i q_i^s \\ \quad \quad \text{Si } A_i \in D_l \text{ et } q_i^s = q_{\min}^s \text{ alors } A_i \in D_{l+1} \end{array} \right.$$

(6) Initialisation d'une nouvelle distillation :

$$D_l \leftarrow D_{l+1}$$

$$s \leftarrow s + 1$$

Aller en (3)

Ce pas est identique au (8) de l'algorithme de description d'ELECTRE III.

***Etape 3 : Construction des classements finaux***

Les classements finaux, c'est à dire le préordre partiel et le préordre complet, sont obtenus en appliquant la procédure de détermination de la synthèse de deux classements (sect. 7.8 de l'ouvrage et chap. 5 du présent document).

D4.4.3 Diagramme logique des distillations

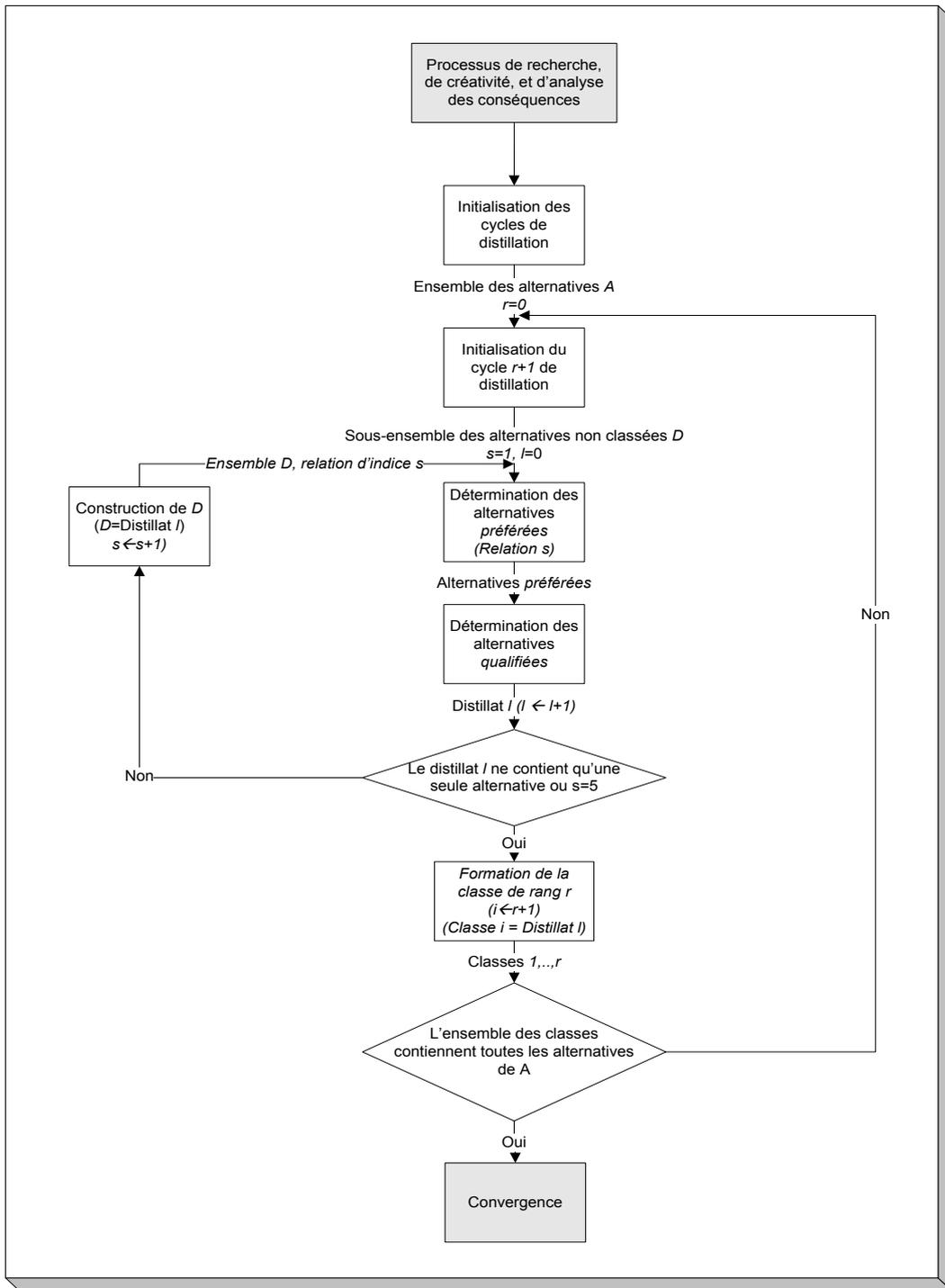


Fig. 4-4 Diagramme logique du processus de distillation d'ELECTRE IV.

## **D4.5 ELECTRE TRI**

### **D4.5.1 Propriétés des critères**

Les propriétés des critères d'ELECTRE TRI comprennent les poids  $w_k$ , un seuil de préférence  $P_k$ , un seuil d'indifférence  $S_k$ , et un seuil de veto  $Q_k$ .

Cette procédure d'exploitation portant sur la problématique de tri (Ouvrage : sect. 6.5.2, tableau 6-8), mobilise un système de préférences défini par :

$A_i \sum a_j \Leftrightarrow \sigma_{ij} \geq \lambda$ , avec  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $\sigma_{ij}$  étant l'indice de crédibilité tel que défini pour ELECTRE III.

Dans une problématique de tri, la relation  $\sum$  n'a pas pour objectif de comparer les actions entre elles, mais à les comparer indépendamment les unes des autres à des actions de référence  $A_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n^* - 1$ ). Les  $A_i^*$  sont des actions limites qui marquent les frontières successives qui séparent les catégories  $G^1, G^2, \dots, G^{k^*}$  auxquelles on veut affecter les actions  $A_i$  qui constituent une famille complètement ordonnée.

Chaque alternative de référence  $A_i^*$  est définie par son vecteur des jugements  $U^* = \{V_1^*, V_2^*, \dots, V_n^*\}$ . Ce vecteur est appelé profil de référence ou profil limite.

Enfin, on introduit deux profils supplémentaires  $U_0^*$  et  $U_n^*$  qui constituent le vecteurs des jugements de deux actions irréalistes (fictives)  $A_0^*$  et  $A_n^*$ , vérifiant :

$$A_i \sum A_0^* \text{ et } \text{Non}(A_0^* \sum A_i), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$A_n^* \sum A_i \text{ et } \text{Non}(A_i \sum A_n^*), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

ELECTRE TRI fait intervenir deux procédures qui conduisent respectivement à une affectation pessimiste et à une affectation optimiste. Les deux procédures peuvent conduire à la même affectation d'une action, mais il est possible qu'elle soit différente.

### **D4.5.2 ELECTRE TRI pessimiste**

- (1) Vérifier l'hypothèse  $A_i \sum A_k^*$  pour  $k = k^*, k^* - 1, \dots, 0$
- (2) Arrêter la procédure dès que l'hypothèse est vérifiée, soit pour  $k = k_0$ .

(3) Affecter  $A_i$  à la catégorie  $G^{k_0}$ , qui est donc la catégorie la plus haute.

#### **D4.5.3 ELECTRE TRI optimiste**

(1) Vérifier l'hypothèse  $A_k^* f A_i$  pour  $k = 0, 1, \dots$

(2) Arrêter la procédure dès que l'hypothèse est vérifiée, soit pour  $k = k_0$ .

(3) Affecter  $A_i$  à la catégorie  $G^{k_0}$ , qui est donc la catégorie la plus basse.

#### **D4.6 PROMETHEE I/II**

L'objectif des deux méthodes d'analyse multicritère PROMETHEE est de construire via un système de préférences floues, un classement des alternatives des meilleures aux moins bonnes ; ce classement étant un préordre partiel (préférence stricte, indifférence et incomparabilité) pour PROMETHEE I, et un préordre complet (indifférence et préférence stricte) pour PROMETHEE II.

Les conditions d'application de la suite PROMETHEE, supposent que l'on dispose d'une part du poids normé de chaque critère et d'une fonction de préférence qui traduit l'affirmation de la préférence d'une alternative  $A$  sur une alternative  $B$  et qui est fonction de l'écart de jugement entre  $A$  et  $B$ . Cette fonction est supposée croissante et prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0,1]$ . Lorsque la fonction de préférence prend la valeur zéro,  $A$  n'est pas préférée à  $B$ , et lorsqu'elle prend la valeur 1,  $A$  est préférée strictement à  $B$ . La fonction de préférence peut prendre diverses formes, selon le système de préférences choisi.

La procédure d'analyse multicritère PROMETHEE, fondée sur les comparaisons par paires, introduit les notions de *puissance* et de *faiblesse* d'une alternative, et de *flux nets partiels* par critère, et de *flux nets agrégés* pour l'ensemble des critères. La puissance et la faiblesse d'une alternative font intervenir la valeur de la fonction de préférence et le poids normé, et ceci pour chaque critère.

La puissance de  $A$  traduit l'importance de ses surclassements sur les autres alternatives et sa faiblesse traduit l'importance des surclassements que les autres alternatives exercent sur elle, en tenant compte de l'ensemble des critères. L'écart entre la puissance d'une alternative et sa faiblesse pour l'ensemble des critères, détermine le flux net agrégé. On montre que le flux net agrégé est égal à la somme pondérée des flux nets partiels.

En ce qui concerne PROMETHEE I, le classement final est obtenu par l'intersection des deux préordres partiels induits par le vecteur des puissances d'une part, et par le vecteur des faiblesses de l'autre, étant entendu que deux alternatives sont déclarées incomparables, s'il n'est pas possible d'affirmer que l'une est meilleure que l'autre ou qu'elles sont indifférentes.

En ce qui concerne PROMETHEE II, le classement final qui est un préordre complet, est obtenu en rangeant les alternatives sur la base de la valeur croissante de leur flux net agrégé.

Pour une présentation succincte de PROMETHEE ainsi que l'illustration par un exemple consulter la section 9.9 de l'ouvrage cité en tête de ce document.

#### **D4.6.1 Les six formes de la fonction préférence**

Rappelons que le contexte de mise en œuvre de la suite PROMETHEE nécessite la disposition de poids de l'importance relative et d'une fonction de préférence, attachés à chaque critère, et que nous avons formalisés de la sorte :

- $\{w_k\}_{k=1\dots m}$  désigne le vecteur des poids relatifs des critères, avec :  $w_k \geq 0$  et  $\sum_{k=1}^m w_k = 1$ .
- $\{f_k\}_{k=1\dots m}$  désigne le vecteur des fonctions de préférence du décideur, individu ou groupe d'individus.

Dans le cas de PROMETHEE,  $f_k$  est une fonction croissante des écarts de jugement. Si  $(A_i, A_j)$  désigne une paire d'alternatives,  $x_{ij}^k = V_{ik} - V_{jk}$  et  $f_k(x_{ij}^k)$  désigne la mesure de la préférence du décideur, de l'alternative  $A_i$  par rapport à l'alternative  $A_j$ .

La fonction  $f_k(x_{ij}^k)$  est parfois représentée de façon commode par  $f_k(A_i, A_j)$  et vérifie :  $0 \leq f_k(x_{ij}^k) \leq 1, \forall k$ ; avec comme cas particuliers :

Si  $f_k(A_i, A_j) = 0$  alors il n'existe pas de préférence de  $A_i$  sur  $A_j$ .

Si  $f_k(A_i, A_j) = 1$  alors  $A_i$  est préférée à  $A_j$ ; i.e.  $A_i f A_j$ .

Les cinq formes standards que peut prendre la fonction de préférence sont décrites ci-dessous, étant entendu que le décideur est libre de choisir une autre forme plus conforme à son système de valeurs, à condition qu'elle soit croissante en  $x_{ij}^k$ .

- **Forme 1 : Vrai-critère**

Il s'agit du critère au sens classique, puisque aucun paramètre supplémentaire n'est exigé en dehors des poids. L'indifférence entre  $A_i$  et  $A_j$  est vérifiée dès que  $x_{ij}^k = 0$ , et les situations de préférence de l'une sur l'autre quand  $x_{ij}^k \neq 0$ .

Dans ce cas, on a :

$$f_k(x_{ij}^k) = \begin{cases} 0 & \forall x_{ij}^k \leq 0 \\ 1 & \forall x_{ij}^k > 0 \end{cases}$$

- **Forme 2 : Quasi-critère**

La construction de la fonction de préférence exige l'introduction d'un seuil qui détermine l'intervalle d'indifférence, le domaine de préférence stricte et permet d'établir un ordre partiel sur l'ensemble des alternatives. Bien que considéré comme un simple paramètre, ce seuil est semblable au seuil d'indifférence tel que défini pour ELECTRE.

Dans ces conditions, on a :

$$f_k(x_{ij}^k) = \begin{cases} 0 & \forall x_{ij}^k \leq S_k \\ 1 & \forall x_{ij}^k > S_k \end{cases}$$

- **Forme 3 : Fonction de préférence linéaire**

Cette forme repose sur l'hypothèse que le décideur, dans certains cas, considère que sa préférence croît progressivement jusqu'à atteindre une certaine valeur  $S_k$  à partir de laquelle, elle devient stricte.

Autrement dit :

$$f_k(x_{ij}^k) = \begin{cases} \frac{x_{ij}^k}{S_k} & \text{pour } x_{ij}^k \leq S_k \\ 1 & \text{pour } x_{ij}^k \geq S_k \end{cases}$$

- **Forme 4 : Critère de niveau**

Cette quatrième forme des fonctions de préférence suggère l'introduction de deux paramètres  $S_k$  et  $P_k$  qui établissent deux niveaux de préférence et bien sûr un niveau d'indifférence. Cela nous rappelle le système de préférences associé à un pseudo-critère tel que défini dans ELECTRE et qui introduit une zone de préférence faible entre l'indifférence

et la préférence stricte. Mais ici, la préférence faible est considérée comme une *intensité* et non comme une zone tampon perçue comme marquant un flottement entre les deux.

Au plan formel, l'expression de la fonction de préférence associée à un critère de niveau est :

$$f_k(x_{ij}^k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pour } x_{ij}^k \leq S_k \\ \frac{1}{2} & \text{pour } S_k < x_{ij}^k \leq S_k + P_k \\ 1 & \text{pour } x_{ij}^k > S_k + P_k \end{array} \right\}$$

- **Forme 5 : Fonction de préférence linéaire combinée à une zone d'indifférence.**

Globalement, c'est une extension de la forme 4, qui prévoit que dans l'intervalle séparant les deux seuils  $S_k$  et  $P_k$ , la fonction de préférence est linéaire et croît progressivement jusqu'à atteindre la somme des deux seuils.

Cette propriété se traduit par la formulation :

$$f_k(x_{ij}^k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pour } x_{ij}^k \leq S_k \\ \frac{x_{ij}^k - P_k}{P_k} & \text{pour } S_k \leq x_{ij}^k \leq S_k + P_k \\ 1 & \text{pour } x_{ij}^k \geq S_k + P_k \end{array} \right\}$$

- **Forme 6 : Critère gaussien**

La fonction de préférence est de type gaussien et croît avec l'écart de jugement.

$$f_k(x_{ij}^k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pour } x_{ij}^k \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x_{ij}^k}{2\sigma^2}} & \text{pour } x_{ij}^k \geq 0 \end{array} \right\}$$

La valeur de  $\sigma$  en Statistiques représente la distance entre l'origine et le point d'inflexion de la courbe de Gauss. Dans ce cas précis, elle est fixée par le décideur. Tous les seuils, ainsi que le paramètre  $\sigma$  sont considérés comme constants dans PROMETHEE.

#### D4.6.2 Description de la procédure

**Etape 1 : Détermination des matrices des préférences**

$$F^k = \left\{ f_{ij}^k \right\}_{k=1 \dots m} \text{ et } f_{ij}^k = f_k(x_{ij}^k) \quad \text{pour } (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m)$$

**Etape 2 : Détermination des vecteurs des puissances et des faiblesses**

**des alternatives**

Puissance de l'alternative  $A_i$  :

$$\phi_i^+ = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}^k \cdot w_k$$

Faiblesse de l'alternative  $A_i$  :

$$\phi_i^- = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ji}^k \cdot w_k$$

Aller à l'Étape 5, Pas (1)

**Etape 3 : Détermination de la matrice des flux nets partiels**

Il est possible de définir un *flux net partiel*  $\phi_i^k$  de l'alternative  $A_i$  pour le critère  $C_k$  qui peut servir à la conduite d'analyses par critère, via, par exemple, de représentations graphiques, mais aussi pour déterminer autrement les flux nets agrégés.

$$\phi_i^k = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \{f_{ij}^k - f_{ji}^k\}$$

Aller à l'Étape 5, Pas (3) ou continuer.

**Etape 4 : Détermination du vecteur des flux nets agrégés**

Le flux net agrégé associé à l'alternative  $A_i$  est déterminé directement à partir de sa puissance et sa faiblesse ou en passant par la somme pondérée des flux nets partiels.

(1)  $\phi_i = \phi_i^+ - \phi_i^-$

(2)  $\phi_i = \sum_{k=1}^m \phi_i^k \cdot w_k$

Aller à l'Étape 5, Pas (2).

**Etape 5a : Formation des classements PROMETHEE I**

Formation du classement par puissance décroissante  $Z_1$  et du classement par faiblesse croissante  $Z_2$ .

Classement  $Z_1$

- Indifférence :  $A_i : A_j \Leftrightarrow \phi_i^+ = \phi_j^+$
- Préférence stricte :  $A_i f^> A_j \Leftrightarrow \phi_i^+ > \phi_j^+$

Classement  $Z_2$

- Indifférence :  $A_i : A_j \Leftrightarrow \phi_i^- = \phi_j^-$
- Préférence stricte :  $A_i f^> A_j \Leftrightarrow \phi_i^- < \phi_j^-$

Le classement final  $Z$  est obtenu par l'intersection de  $Z_1$  et  $Z_2$  :  $Z = Z_1 \cap Z_2$ .

C'est-à-dire que si une relation entre  $A_i$  et  $A_j$  (indifférence ou préférence) est vraie dans  $Z_1$  et  $Z_2$ , elle est vraie aussi dans  $Z$ . Si ce n'est pas le cas,  $A_i$  et  $A_j$  sont incomparables.

On peut aussi utiliser la procédure de synthèse de deux classements pour déterminer un préordre partiel et un préordre total (sect. 7.8 de l'ouvrage et chap. 5 du présent document).

Le *préordre partiel* obtenu  $Z$  permet de mettre en évidence des relations d'indifférence, de préférence stricte et d'incomparabilité, par paire d'alternatives.

L'incomparabilité est mise en évidence dans  $Z$  dans les cas suivants :

$$A_i ? A_j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi_i^+ = \phi_j^- \text{ et } \phi_i^+ \neq \phi_j^- \\ \text{ou} \\ \phi_i^+ > \phi_j^- \text{ et } \phi_i^+ < \phi_j^- \end{array} \right\}$$

**Etape 5b : Formation des classements PROMETHEE II**

Formation du classement final par flux net agrégé décroissant.

Le préordre complet obtenu met en évidence l'indifférence et la préférence stricte par paire d'alternatives :

- Indifférence :  $A_i : A_j \Leftrightarrow \phi_i = \phi_j$
- Préférence stricte :  $A_i f^> A_j \Leftrightarrow \phi_i > \phi_j$

Analyse du couple  $(A_i, C_k)_{i=1\dots n; k=1\dots m}$

Représentation du profil de chaque alternative  $g_i(C_k, \phi_i^k)$  et analyse de performance.

**D4.6.3 Diagramme logique d'exploitation**

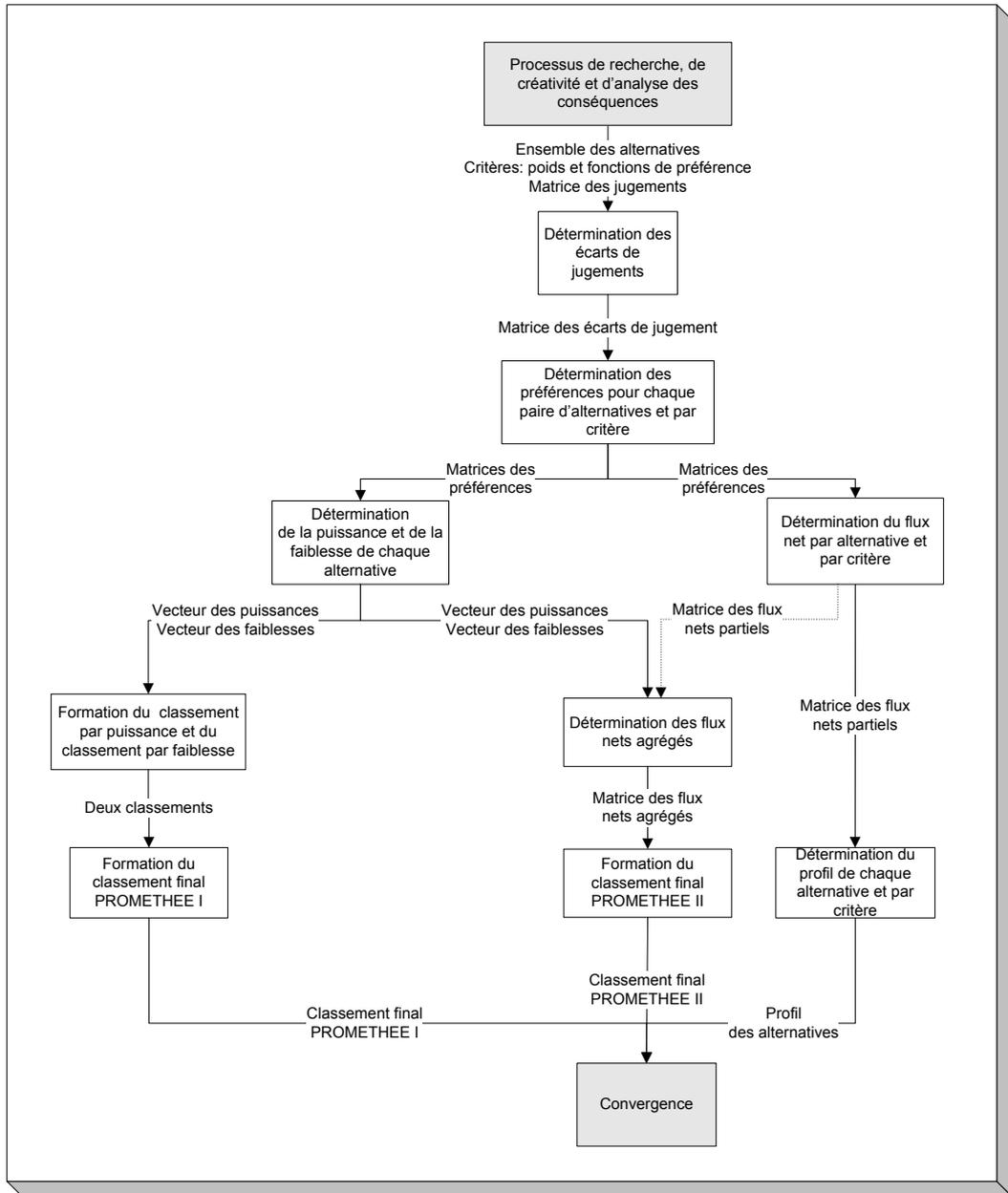


Fig. 4-5 Diagramme logique du processus d'exploitation de la suite PROMETHEE.

# D5.

## PROCÉDURE DE SYNTHÈSE DE DEUX CLASSEMENTS

### D5.1 Principes

Soient un ensemble de  $n$  d'alternatives  $A_i$  et deux classements  $Z_1$  et  $Z_2$  de ces alternatives par ordre de préférence décroissante conformément au modèle relationnel  $(f ; :)$ , c'est à dire des préordres complets. Ces deux classements peuvent être obtenus à l'issue d'un jugement d'experts ou de l'implémentation d'une méthode d'analyse de la décision multicritère. L'objectif de l'algorithme proposé est de déterminer un classement  $Z$  de synthèse de l'ensemble des alternatives, de la meilleure à la moins bonne, selon un modèle de préférences de type  $(f ; : ; ?)$  si on souhaite mettre en évidence l'existence de l'incomparabilité, ou le modèle  $(f ; :)$ , sinon.

Le classement de synthèse peut être représenté par un graphe noté  $G = (\Gamma^r, A)$  où  $A$  représente l'ensemble des sommets et  $\Gamma^r$  une application de l'ensemble  $A$  dans lui-même et définie ainsi :

Si  $\{A_j\}^r$  est l'ensemble des alternatives de rang  $r$  dans  $Z$  et il existe une alternative  $A_i$  telle que  $A_i f A_j$ , on a :  $\{A_j\}^r = \Gamma^r(A_i)$  et les paires  $(A_i, A_j)$  constituent des arcs du graphe  $G$  matérialisant la préférence de  $A_i$  par rapport aux alternatives  $A_j$ .

Soit  $A_{i_0}$  une alternative de rang 1 et  $r_0$  le nombre de niveaux de classement. L'ensemble  $A_{i_0} \cup \Gamma^1(A_{i_0}) \cup \Gamma^2(A_{i_0}) \cup \dots \cup \Gamma^{r_0}(A_{i_0})$  est la *fermeture transitive* du graphe  $G$  au

sommet  $A_{i_0}$  et représente l'alternative  $A_{i_0}$  et l'ensemble des alternatives de rang inférieur. Notons que  $r$  représente le nombre d'arcs ou la longueur du chemin allant de  $A_{i_0}$  de rang 1 à  $A_j$  de rang  $r$  et telle que :  $A_j = \Gamma^r(A_{i_0})$ .

Le problème de la détermination des alternatives de rang  $r$  revient à identifier les alternatives appartenant aux chemins de longueur  $r$ . Ceci est possible en construisant la matrice binaire  $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$  associée au graphe  $G$  et telle que :

Si  $A_i$  f  $A_j$  alors  $b_{ij} = 1$  (préférence)

Sinon  $b_{ij} = 0$  (indifférence ou incomparabilité).

Notons que le couple  $(A_i, A_j)$  constitue un arc dans le graphe  $G$  et donc  $b_{ij}$  est égal à 1, si  $\text{rang}(A_i) > \text{rang}(A_j)$ , sinon l'arc  $(A_i, A_j)$  n'existe pas et  $b_{ij}$  est égal à 0.

On peut objecter à ce raisonnement, de supposer implicitement que la relation de préférence est transitive. En réalité, pour chacun des deux classements, elle l'est, puisque seules les alternatives de tête seront retenues alors que les alternatives de dernier rang seront écartées, sinon les deux classements n'ont aucune utilité.

Par contre, la procédure ayant abouti à la construction des deux classements ne doit dépendre d'une quelconque hypothèse de transitivité.

Enfin, on peut vérifier que  $\mathbf{B}^l$  représente le nombre de chemins de longueur  $l$  existant entre deux alternatives  $A_i$  et  $A_j$ . Si  $G$  est fini et ne comporte pas de circuit, et si on calcule successivement au sens arithmétique  $\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \dots, \mathbf{B}^l$  jusqu'à ce qu'on obtient  $\mathbf{B}^l = \{0\}$ , dans ces conditions, il existe un chemin de longueur  $l-1$  entre les sommets  $A_i$  et  $A_j$ , et le rang de l'alternative  $A_i$  est égal 1.

De manière générale, s'il existe un chemin de longueur  $l-r$  entre  $A_i$  et  $A_j$  vérifiant  $A_i$  f  $A_j$ , alors le rang de  $A_i$  dans  $\mathbf{Z}$  est égal à  $r$ .

## **D5.2 Description de la procédure**

### *Etape 1 : Construction de la matrice B*

Deux moyens peuvent être envisagés pour constituer la synthèse des deux classements :

- (1) **Intersection**  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \cap \mathbf{Z}_2$ , dans le sens où on ne prend en compte que les relations de préférence :

Si  $(A_i \succ A_j)_{Z_1}$  ET  $(A_i \succ A_j)_{Z_2}$  alors  $(A_i \succ A_j)_Z$  et  $b_{ij} = 1$  (préférence).

Sinon,  $(A_i \succ A_j)_Z$  OU  $(A_i \sim A_j)_Z$  et  $b_{ij} = 0$  (indifférence ou incomparabilité).

Dans ce cas, le classement de synthèse est un préordre partiel et présente l'inconvénient de ne pas donner de réponse à l'existence éventuelle d'alternatives incomparables. On se retrouve avec un graphe de synthèse comportant des points isolés.

(2) **Union**  $Z = Z_1 \cup Z_2$ , telle que :

Si  $(A_i \succ A_j)_{Z_1}$  ET/OU  $(A_i \succ A_j)_{Z_2}$  alors  $(A_i \succ A_j)_Z$  et  $b_{ij} = 1$

Sinon  $b_{ij} = 0$

Dans ce cas, l'incomparabilité est prise en compte et elle se traduit par l'existence de circuits induits par les relations simultanées  $(A_i \succ A_j)_{Z_1}$  et  $(A_j \succ A_i)_{Z_2}$ .

En supprimant les circuits de longueur 2 de la matrice  $\mathbf{B}$ , il est possible d'ordonner les alternatives tout en conservant celles déclarées incomparables en (1).

Intuitivement, le fait qu'on ait  $A_i \succ A_j$  et  $A_j \succ A_i$  traduit l'existence d'un conflit dans l'appréciation des deux alternatives. En supprimant ce conflit par l'élimination des arcs  $(A_i, A_j)$  et  $(A_j, A_i)$ , ce qui va dans un sens consensuel, on conserve la configuration générale du classement. Dans le cas limite où il existe un *circuit hamiltonien*, c'est à dire un circuit qui transite par tous les sommets du graphe, l'étape 2 de l'algorithme n'est pas applicable et il faut, soit revoir les données à l'entrée de l'ensemble du processus de décision, ce que nous préconisons fortement, soit s'en remettre à des comparaisons de positions ou de rangs entre les classements  $Z_1$  et  $Z_2$ . Par exemple, on peut opérer le classement par ordre croissant de la quantité :  $r_{Z_1}(A_i) + r_{Z_2}(A_i)$  (somme des rangs de  $A_i$  dans  $Z_1$  et  $Z_2$ ).

### **Etape 2 : Détermination du classement de synthèse**

La matrice  $\mathbf{B}$  est obtenue par l'intersection ou l'union avec la suppression des circuits de longueur 2.

(3) Calcul de  $\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \dots, \mathbf{B}^l, \dots, \mathbf{B}^L$  avec  $\mathbf{B}^L = \{0\}$

(4) On désigne par  $b_{ij}^l$  les coefficients de la matrice  $\mathbf{B}^l$ .

Si  $b_{ij}^l \neq 0$  alors  $r(A_i) = L - l$ .

(5) Construire  $Z$  en répétant (4) pour  $l = L - 1, \dots, 1$

Cet algorithme dont nous donnons également une description logique (Fig. 5-1) a été implémenté dans le cadre du logiciel C@MCDA Workshop et appliqué avec succès à divers problèmes de décision.

D5.3 Diagramme logique de la synthèse de deux classements

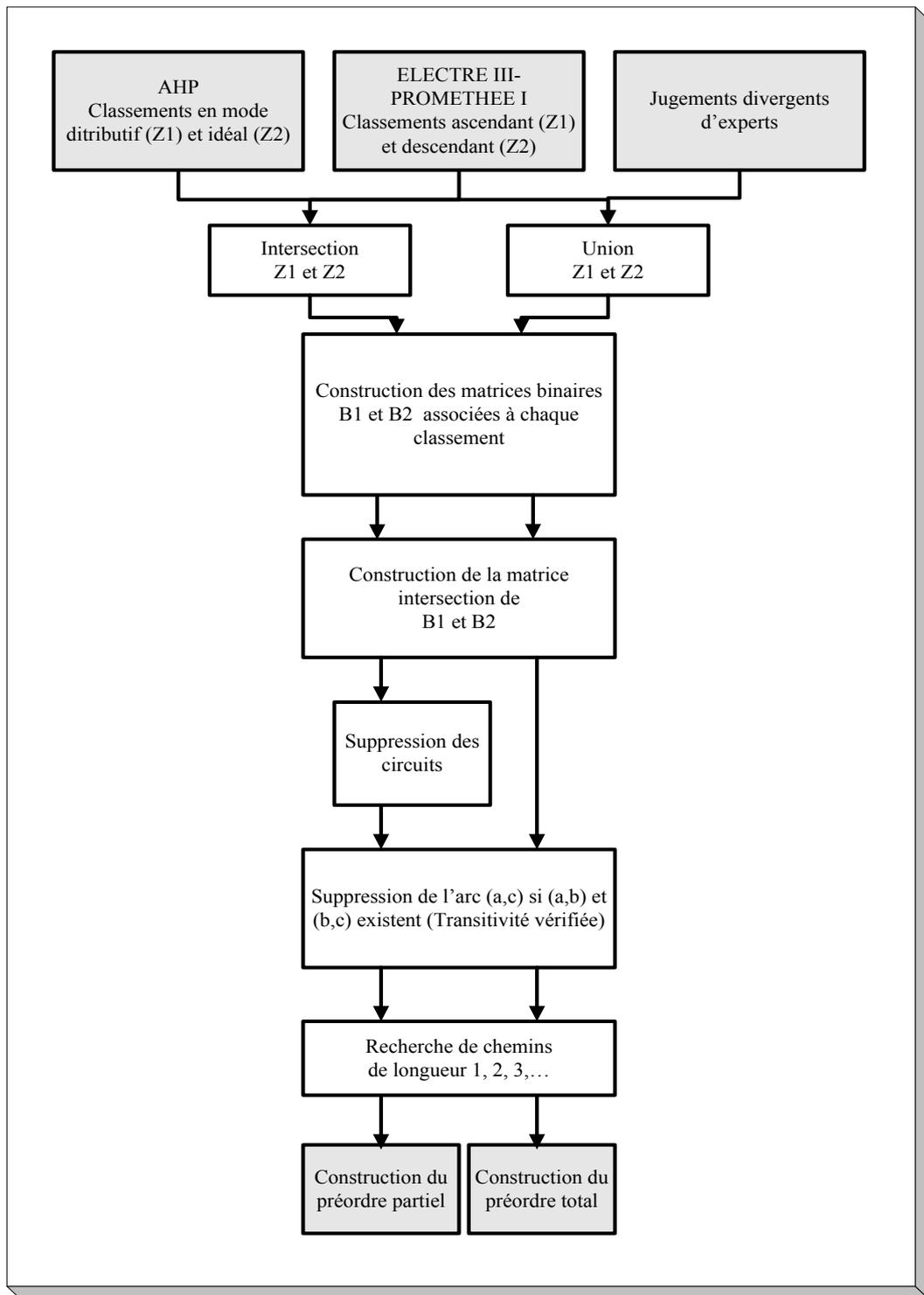


Fig. 5-1 Procédure de détermination de la synthèse de deux classements.